

UNIVERSITÉ DE PAU ET PAYS DE L'ADOUR

COURS DE MASTER 2

Analyse mathématique des phénomènes de propagation d'ondes

Hélène Barucq et Sébastien Tordeux

Equipe Projet Commune Magique 3D

INRIA Bordeaux Sud-Ouest

LMA, UMR CNRS 5142, Université de Pau et Pays de l'Adour

2020/2021

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	L'équation des ondes scalaires 1D	3
1.1.1	Un système masses-ressorts 1D	3
1.1.2	Résolution analytique de l'équation de d'Alembert	6
1.1.3	Ondes planes et relation de dispersion	9
1.2	Propagation d'ondes acoustiques	10
1.2.1	Dérivation de l'équation des ondes acoustiques	10
1.2.2	Ondes planes et relation de dispersion	12
1.3	Propagation d'ondes élastiques	13
1.3.1	Dérivation de l'équation d'ondes élastiques	13
1.3.2	Ondes planes élastiques et relation de dispersion	14
1.4	Propagation d'ondes électromagnétiques	15
1.4.1	Dérivation de l'équation d'ondes	15
2	Le théorème de Hille-Yosida	18
2.1	Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard	18
2.1.1	Cas général	18
2.1.2	Cas d'un opérateur linéaire positif	20
2.2	Enoncé du théorème de Hille-Yosida	21
2.3	Unicité de la solution	22
2.4	Régularisée de Yosida	22
2.5	Définition et propriété de la régularisée u_λ de u	25
2.6	Démonstration du théorème de Hille-Yosida dans le cas où $u_0 \in D(A^2)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$	27
2.6.1	Passage à la limite sur u_λ pour $\lambda \rightarrow 0^+$	27
2.7	Démonstration du théorème de Hille-Yosida dans le cas général où $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, H)$	31
2.8	Notion de semi-groupe	34
2.9	Exercices du chapitre 2	35

3	Condition aux limites transparentes	40
3.1	Les Conditions aux limites absorbantes en dimension un	40
3.2	Les couches absorbantes parfaitement adaptées en dimension un	44
3.2.1	Propagation d'onde en milieu absorbant	44
3.2.2	Relation de dispersion et ondes planes pour l'équation des ondes et dans la PML.	46
3.2.3	Construction de couche parfaitement adaptées	47
3.2.4	Troncature du domaine	47
3.2.5	Etude de réflexion-transmission : PML non bornée	48
3.2.6	Etude de réflexion-transmission : PML bornée	50
3.2.7	Coefficient d'absorption parabolique	51
3.3	Les couches absorbantes parfaitement adaptées en dimension $n \geq 2$	52
3.3.1	Les couches absorbantes de Béranger	53
3.3.2	Relation de dispersion dans le domaine de propagation et dans la PML	54
3.3.3	Etude de réflexion-transmission par ondes planes : PML non bornée	56
3.3.4	Etude de réflexion-transmission : PML bornée	57
3.3.5	Les PML dans toutes les directions d'espace	59
3.3.6	PML à profil parabolique	60
3.4	Les Conditions aux limites absorbantes en dimension $n \geq 2$	61
3.4.1	Présentation de quelques conditions aux limites absorbantes sur une surface plane	61
3.4.2	Caractère bien posé des CLA d'ordre 1	63
3.4.3	Calcul du coefficient de réflexion	65
3.4.4	Conditions aux limites sur une surface sphérique	66
3.5	Analyse des conditions de Bayliss et Turkel en dimension 3	68
4	L'équation de Helmholtz dans l'espace libre	72
4.1	Introduction	72
4.2	La condition de radiation de Sommerfeld	75
4.2.1	Fonction de Green et existence de solution sortante	75
4.2.2	Unicité de la solution sortante de l'équation d'Helmholtz	82
4.3	Le principe d'amplitude limite	84
4.4	Le principe d'absorption limite	89
4.5	Développement en champ lointain	91
A	Quelques résultats d'analyse fonctionnelle	94
A.1	Les opérateurs linéaires non bornés	94
A.2	Les opérateurs maximaux monotones	97

A.3	Continuité, Dérivation dans les espaces de Banach et intégration dans les espace de Hilbert	102
A.3.1	Notion de continuité dans un espace de Banach	102
A.3.2	Notion de dérivation dans un espace de Banach	103
A.3.3	Intégration dans un espace de Hilbert	103
A.4	L'alternative de Fredholm	104

Chapitre 1

Introduction

1.1 L'équation des ondes scalaires 1D

1.1.1 Un système masses-ressorts 1D

Dans cette section, nous considérons un système de masses reliées par des ressorts. Nous montrons que leur dynamique est gouvernée par l'équation des ondes scalaires 1D lorsque le nombre de masses est grand.

On considère un système de I ressorts et de $I - 1$ masses mobiles se déplaçant horizontalement le long d'une tige, voir Figure 1.1. La tige a pour longueur L . Les mobiles ont tous la même masse m . Ils sont numérotés de gauche à droite par i allant de 1 à $I - 1$. Les ressorts ont tous même coefficient de raideur k et longueur à vide $h = 1/I$. Les ressorts sont eux aussi numérotés de gauche à droite par i allant de 1 à I . La masse i est reliée à gauche au ressort i et à droite au ressort $i + 1$. Le ressort 1 est fixé par sa gauche en $x = 0$. Le ressort $N + 1$ est fixé par sa droite en $x = L$.

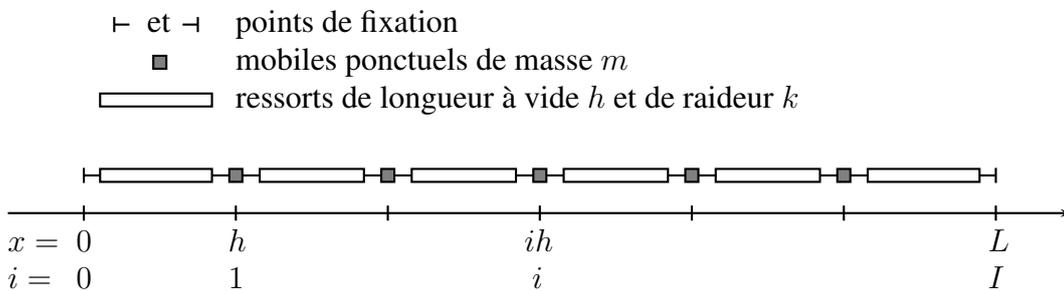


FIGURE 1.1 – Le système masses-ressorts à l'équilibre

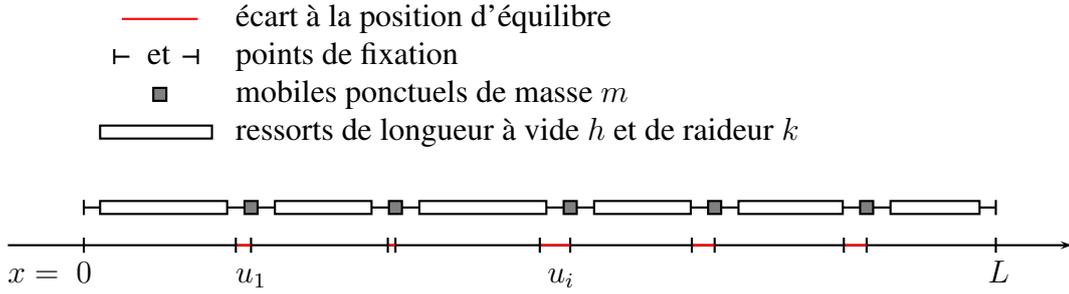


FIGURE 1.2 – Le système masses-ressorts hors équilibre

Position d'équilibre. A l'équilibre, la masse i est au repos à la position $x_i = ih$. Dans cette configuration les ressorts n'exercent aucune force sur les masses.

La dynamique. On note $x_i + u_i^I(t)$ la position de la masse i au cours du temps. Les $u_i^I(t)$ sont les écarts à la position d'équilibre de la masse i . On introduit la convention $u_0^I(t) = 0$ et $u_I^I(t) = 0$. L'exposant I précise simplement qu'il s'agit du système à I masses et nous permettra dans la suite de passer à la limite sur le nombre de masses.

On note d'autre part $h + \ell_i(t)$ la longueur du ressort i où $\ell_i(t)$ est l'allongement du ressort. Il est donné en fonction des $u_i(t)$ par

$$\ell_i(t) = u_i^I(t) - u_{i-1}^I(t). \quad (1.1)$$

Effectuons le bilan des forces extérieures. Il s'exerce sur la masse i les forces extérieures suivantes :

- la force exercée par le ressort i sur la masse i dont la composante suivant x est donnée par

$$F_{i \rightarrow i} = -k \ell_i(t) = -k u_i^I(t) + k u_{i-1}^I(t). \quad (1.2)$$

- la force exercée par le ressort $i + 1$ sur la masse i

$$F_{i+1 \rightarrow i} = k \ell_{i+1}(t) = k u_{i+1}^I(t) - k u_i^I(t). \quad (1.3)$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m \ddot{u}_i^I(t) = k u_{i-1}^I(t) - 2k u_i^I(t) + k u_{i+1}^I(t), \quad \forall i \in \llbracket 1, I - 1 \rrbracket. \quad (1.4)$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} u_0^I(t) = 0, \\ m\ddot{u}_i^I(t) = k(u_{i+i}^I(t) - 2u_i^I(t) + u_{i-1}^I(t)), \quad \forall i \in \llbracket 1, I-1 \rrbracket, \\ u_I^I(t) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

qui est équipé de deux conditions initiales

$$u_i(0) = U_i \quad \text{et} \quad v_i(0) = V_I \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq I-1. \quad (1.6)$$

Passage à la limite sur le nombre de masses. Nous allons maintenant considérer un système masses-ressorts constitué d'un grand nombre de masse. Nous introduisons la fonction $u^I(\mathbf{x}, t)$ continue et affine par morceaux dont les valeurs nodales sont données par

$$u^I(x_i, t) = u_i^I \quad \text{pour } i \in \llbracket 0, I \rrbracket. \quad (1.7)$$

Notre but est alors de passer à la limite sur le nombre de masses

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{I \rightarrow +\infty} u^I(\mathbf{x}, t). \quad (1.8)$$

Ceci nous permettra d'approcher, pour I grand, $u_i^I(t)$ par $u(\frac{i}{I}, t)$.

Afin de pouvoir passer à la limite, il nous faut donner la dépendance de k et m en fonction de $h = 1/I$. Elle est basée sur deux considérations physiques : D'après les lois de comportement des matériaux, en coupant un ressort en deux on multiplie par deux son coefficient de raideur. C'est pourquoi on suppose que pour h petit le coefficient de raideur admet la forme $k = \frac{k_0}{h}$. Afin d'imposer une masse totale du système constante on suppose aussi que $m = m_0 h$. On aboutit au système :

$$\begin{cases} u_0(t) = 0. \\ \ddot{u}_i(t) = \frac{k_0}{m_0} \frac{u_{i+i}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2}, \quad \forall i \in \llbracket 1, I-1 \rrbracket. \\ u_I(t) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

La théorie des différence finies, nous permet de voir que u^I admet pour limite u qui vérifie l'**équation des ondes scalaires**, appelée aussi **équation de d'Alembert**,

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & \text{pour } t \geq 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & \text{pour } x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0, \\ u(L, t) = 0, & \text{pour } t \geq 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

avec $c > 0$ la vitesse de propagation de l'ondes qui est donnée par

$$c^2 = \frac{k_0}{m_0}. \quad (1.11)$$

1.1.2 Résolution analytique de l'équation de d'Alembert

Nous résolvons ici l'équation d'ondes

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0 \quad (1.12)$$

munie des conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

avec un terme source $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ et des conditions initiales u_0 and $u_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

Pour déterminer une solution analytique de ce problème, on pose le changement de variables

$$\begin{cases} X = x + ct \\ Y = x - ct \end{cases} \quad \text{ou de manière équivalente} \quad \begin{cases} x = \frac{X+Y}{2} \\ y = \frac{X-Y}{2c} \end{cases} \quad (1.14)$$

On introduit aussi les représentants de u et f dans ces nouvelles coordonnées

$$U(X, Y) = u(x, y) \quad \text{et} \quad F(X, Y) = f(x, y) \quad (1.15)$$

D'après la règle de la chaîne, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial X}(X, Y) + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial Y}(X, Y) = \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right) U(X, Y). \quad (1.16)$$

En répétant le raisonnement, on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 U(X, Y). \quad (1.17)$$

De même, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial X}(X, Y) + \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial Y}(X, Y) = c \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} \right) U(X, Y) \quad (1.18)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 u(x, t). \quad (1.19)$$

Dans ces nouvelles coordonnées, l'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 U(X, Y) - \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 U(X, Y) = F(X, Y). \quad (1.20)$$

Ceci se simplifie en :

$$-4 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}(X, Y) = F(X, Y). \quad (1.21)$$

Nous agissons par linéarité.

Traisons d'abord le cas où $F(X, Y) = 0$. On a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}(X, Y) = 0. \quad (1.22)$$

Nous intégrons tout d'abord par rapport à X . La fonction $\frac{\partial u}{\partial Y}$ est donc une constante en X c'est à dire une fonction de Y

$$\frac{\partial U}{\partial Y}(X, Y) = w(Y). \quad (1.23)$$

On intègre alors cette fonction par rapport à Y . Nous notons u_+ une primitive de w . La fonction $U(X, Y)$ est donnée par

$$U(X, Y) = u_-(X) + u_+(Y). \quad (1.24)$$

avec u_- une fonction de X , c'est à dire une constante en Y . Nous avons donc obtenu

$$u(x, t) = u_+(x - ct) + u_-(x + ct). \quad (1.25)$$

La fonction u est décomposée en deux termes. Le premier u_+ est un terme propagatif dans le sens x croissant se déplaçant à la vitesse c . Le second u_- est un terme propagatif dans le sens x décroissant se déplaçant à la vitesse $-c$.

Pour déterminer u_+ et u_- , nous utilisons les conditions aux limites

$$u_+(x) + u_-(x) = u_0(x) \quad \text{et} \quad -cu'_+(x) + cu'_-(x) = u_1(x). \quad (1.26)$$

En intégrant la deuxième inégalité,, on obtient

$$-cu_+(x) + cu_-(x) = \int_{-\infty}^x u_1(s)ds + C. \quad (1.27)$$

$$\begin{cases} u_+(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^x u_1(s)ds - \frac{C}{2c}, \\ u_-(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^x u_1(s)ds + \frac{C}{2c}. \end{cases} \quad (1.28)$$

En formant la somme $u(x, t) = u_+(x - ct) + u_-(x + ct)$, on obtient donc une expression qui ne dépend pas de la constante d'intégration C . Après simplification, on obtient

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - ct)}{2} + \frac{u_0(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds. \quad (1.29)$$

Traisons ensuite le cas $u_0(\mathbf{x}) = 0$ **and** $u_1(\mathbf{x}) = 0$ Dans le nouveau jeu de variables, les conditions initiales s'écrivent pour tout $Z \in \mathbb{R}$

$$U(Z, Z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial X}(Z, Z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial Y}(Z, Z) = 0 \quad (1.30)$$

Les condition On peut alors intégrer (1.21) et obtenir

$$\frac{\partial U}{\partial Y}(X', Y) - \frac{\partial U}{\partial Y}(Y, Y) = \int_Y^{X'} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}(X, Y)dX = - \int_Y^{X'} \frac{F(X, Y)}{4}dX. \quad (1.31)$$

C'est à dire d'après (1.30)

$$\frac{\partial U}{\partial Y}(X', Y) = - \int_Y^{X'} \frac{F(X, Y)}{4}dX. \quad (1.32)$$

Puis en intégrant suivant Y , on a

$$U(X', X') - U(X', Y') = \int_{Y'}^{X'} \frac{\partial U}{\partial Y}(X', Y) = - \int_{Y'}^{X'} \left(\int_Y^{X'} \frac{F(X, Y)}{4} dX \right) dY. \quad (1.33)$$

On a donc

$$U(X', Y') = \int_{Y'}^{X'} \left(\int_Y^{X'} \frac{F(X, Y)}{4} dX \right) dY. \quad (1.34)$$

En notant $T_{X,Y}$ l'ensemble de \mathbb{R}^2 donné par

$$\widehat{T}_{X',Y'} = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2 : Y' \leq Y \leq X \leq X' \right\} \quad (1.35)$$

on a

$$U(X', Y') = \int_{\widehat{T}_{X',Y'}} \frac{F(X, Y)}{4} dX dY. \quad (1.36)$$

Dans les variables (x, t) , cette expression devient

$$u(x', t') = \int_{T_{x',t'}} \frac{f(x, t)}{2} dx dt \quad (1.37)$$

avec $T_{x',t'}$ l'image réciproque de $\widehat{T}_{X',Y'}$ qui est appelé cône du passé, voir figure 1.3

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{x',t'} = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : x' - ct' \leq x - ct \leq x + ct \leq x' + ct' \right\} \\ = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : x' - c(t' - t) \leq x \leq x' + c(t' - t) \right\} \end{array} \right\} \quad (1.38)$$

Le cas général. Pour obtenir la solution dans le cas général, il nous suffit de sommer (1.29) et (1.37)

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - ct)}{2} + \frac{u_0(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds + \int_{T_{x,t}} \frac{f}{2}. \quad (1.39)$$

1.1.3 Ondes planes et relation de dispersion

Nous recherchons ici des solutions particulières de l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R} \quad (1.40)$$

appelées **ondes planes**

$$u(x, t) = U \exp(i\omega t + ikx) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0. \quad (1.41)$$

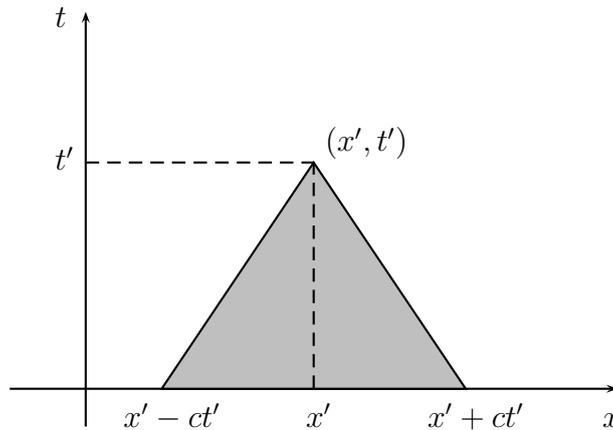


FIGURE 1.3 – Le cône du passé $T_{x',t'}$

En injectant (1.41) dans (1.40), on obtient la **relation de dispersion**

$$-\omega^2 + c^2 k^2 = 0. \quad (1.42)$$

En notant $k = \frac{\omega}{c}$ on a deux familles d'ondes ondes planes. La première se propage dans le sens x croissant à la vitesse $c > 0$ et est proportionnelle à

$$\exp(i\omega t - ikx) \quad (1.43)$$

La seconde famille se propage dans le sens x décroissant à la vitesse $-c < 0$ et est proportionnelle à

$$\exp(i\omega t + ikx) \quad (1.44)$$

1.2 Propagation d'ondes acoustiques

1.2.1 Dérivation de l'équation des ondes acoustiques

Nous considérons un fluide homogène au repos de masse volumique ρ_0 , de pression p_0 . La masse volumique, la pression et la vitesse du fluide sont perturbées par une onde acoustique. On note ρ' l'écart à la masse volumique au repos, p' la surpression et $\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ la perturbation de la vitesse eulérienne du fluide. La masse volumique totale, pression totale et la vitesse totale du fluide sont notées ρ , p et $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho'(\mathbf{x}, t), \quad p(\mathbf{x}, t) = p_0 + p'(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t). \quad (1.45)$$

Ce fluide est régi par le **principe fondamental de la dynamique** (nous supposons que les effets de la gravitation et de frottements sont négligeables)

$$\rho(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) = -\nabla p(\mathbf{x}, t), \quad (1.46)$$

l'équation de **conservation de la matière**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.47)$$

une **loi constitutive du fluide** qui relie la pression à la masse volumique

$$\rho = \rho(p). \quad (1.48)$$

Nous supposons que les effets non linéaires sont négligeables (ceci est vrai dans la plupart des applications). La linéarisation ce système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p'(\mathbf{x}, t), \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \rho'(\mathbf{x}, t) = \chi \rho_0 p'(\mathbf{x}, t) \end{array} \right. \quad (1.49)$$

avec

$$\chi = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dp}(p_0). \quad (1.50)$$

Pour obtenir la formulation **vitesse–pression** on élimine la masse volumique ρ' de ce système

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p'(\mathbf{x}, t), \\ \chi \frac{\partial p'}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \end{array} \right. \quad (1.51)$$

D'autre part, on peut aboutir à l'**équation des ondes** en dérivant la seconde équation par rapport au temps

$$\chi \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.52)$$

Nous injectons la première équation et aboutissons à l'**équation des ondes**

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\chi \rho_0} \operatorname{div} \nabla p'(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.53)$$

On définit alors la vitesse de propagation de l'onde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho_0}}. \quad (1.54)$$

1.2.2 Ondes planes et relation de dispersion

Les **ondes planes** acoustiques sont les solutions de l'équation d'ondes acoustiques qui s'écrivent sous la forme

$$p'(\mathbf{x}, t) = P \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (1.55)$$

Le réel ω est la **pulsation**. Le vecteur $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ est le **vecteur d'onde**. Sa norme euclidienne $\|\mathbf{k}\|$ est appelée nombre d'onde.

Tout point \mathbf{x} peut être décomposé en une composante suivant \mathbf{k} et une autre \mathbf{x}_\perp orthogonale à \mathbf{k}

$$\mathbf{x} = x_k \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|} + \mathbf{x}_\perp \quad \text{avec } x_k \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{x}_\perp \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (1.56)$$

Dans ces coordonnées, on a alors

$$p'(\mathbf{x}, t) = P \exp(i\omega t - i\|\mathbf{k}\|x_k). \quad (1.57)$$

Ainsi, l'onde p' est une onde plane qui ne dépend pas de \mathbf{x}_\perp et qui se propage parallèlement et dans le sens du vecteur d'onde \mathbf{k} à la **vitesse de phase** $\frac{\omega}{\|\mathbf{k}\|}$.

Nous cherchons maintenant une relation qui relie le vecteur d'onde et la pulsation. La surpression p' vérifie l'équation des ondes scalaires

$$\partial_t^2 p'(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta p'(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.58)$$

On obtient donc

$$\left(-\omega^2 + c^2 \|\mathbf{k}\|^2 \right) P \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = 0. \quad (1.59)$$

On a donc la **relation de dispersion**

$$\|\mathbf{k}\|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.60)$$

1.3 Propagation d'ondes élastiques

1.3.1 Dérivation de l'équation d'ondes élastiques

On se place dans un solide déformable. On repère par $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ la position au repos d'un point du solide. Après déplacement, on note $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x}$ sa position au temps t . On dit que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ est le déplacement lagrangien. Le tenseur des déplacements est défini par

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T \right). \quad (1.61)$$

Le tenseur des déplacement décrit les déformations d'un volume élémentaire situé au voisinage du point x en $t = 0$. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, le tenseur des contraintes $\Sigma(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est relié au tenseur des déformation par un opérateur linéaire C

$$\Sigma(\mathbf{x}, t) = C \varepsilon(\mathbf{x}, t) \quad (1.62)$$

Dans le cas de l'**élasticité linéaire isotrope homogène**, cette relation prend une forme particulièrement simple

$$\Sigma(\mathbf{x}, t) = \lambda \operatorname{trace}(\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \mathbf{Id} + 2 \mu \varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad (1.63)$$

avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ les coefficients de Lamé. Le solide est soumis à une densité de force $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Les déplacement dans le solide déformable sont régis par le **principe fondamental de la dynamique**

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \Sigma(\mathbf{x}, t) \quad (1.64)$$

La loi constitutive $\Sigma(\mathbf{x}, t) = C \varepsilon(\mathbf{x}, t)$ nous permet d'éliminer le tenseur des contraintes

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div} C \varepsilon(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.65)$$

Dans le cas isotrope homogène, on a alors

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div} \left(\lambda \operatorname{trace}(\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \mathbf{Id} + 2 \mu \varepsilon(\mathbf{x}, t) \right) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (1.66)$$

Enfin à l'aide des deux identités

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\operatorname{trace}(\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \mathbf{Id} \right) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ 2 \operatorname{div} (\varepsilon(\mathbf{x}, t)) = \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (1.67)$$

on obtient l'équation des ondes vectorielles

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (1.68)$$

1.3.2 Ondes planes élastiques et relation de dispersion

Nous supposons ici que la fonction u a la forme d'une onde plane

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u} \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.69)$$

avec \mathbf{u} et \mathbf{k} des vecteur colonnes de \mathbb{R}^3 . Le tenseur des déplacements est donné par

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T \right) \quad (1.70)$$

En injectant la forme de l'onde plane, il suit que

$$\varepsilon(x, t) = -i \frac{\mathbf{u} \mathbf{k}^T + \mathbf{k} \mathbf{u}^T}{2} \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (1.71)$$

Le tenseur des contraintes est donné en fonction du tenseur des déplacements

$$\Sigma(x, t) = \lambda \text{trace}(\varepsilon(\mathbf{x}, t)) Id + 2 \mu \varepsilon(\mathbf{x}, t) \quad (1.72)$$

On obtient que

$$\Sigma(x, t) = -i \left(\lambda (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) + \mu (\mathbf{k} \mathbf{u}^T + \mathbf{u} \mathbf{k}^T) \right) \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.73)$$

Ainsi, en appliquant l'opérateur divergence on a

$$\text{div}(\Sigma(\mathbf{x}, t)) = - \left(\mu \|\mathbf{k}\|^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{k} \right) \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.74)$$

Cette expression est injectée dans le principe fondamental de la dynamique.

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u}(x, t) - \text{div}(\Sigma(x, t)) = 0. \quad (1.75)$$

Il suit

$$\left(-\omega^2 \rho \mathbf{u} + \mu \|\mathbf{k}\|^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{k} \right) \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = 0. \quad (1.76)$$

En divisant par $\exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, nous obtenons

$$\left(-\omega^2 \rho + \mu \|\mathbf{k}\|^2 \right) \mathbf{u} + (\lambda + \mu) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{k} = 0. \quad (1.77)$$

Le vecteur \mathbf{u} est soit orthogonal à \mathbf{k} soit colinéaire : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0$ ou $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{k}$.

On a la relation de dispersion

$$\begin{cases} -\rho\omega^2 + \mu\|\mathbf{k}\|^2 = 0 & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0, \\ -\rho\omega^2 + (\lambda + 2\mu)\|\mathbf{k}\|^2 = 0, & \text{si } \mathbf{u} = \alpha\mathbf{k}. \end{cases} \quad (1.78)$$

On a exhibé deux familles d'ondes planes de la forme

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u} \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.79)$$

Les ondes planes de la première famille sont les **ondes S** ou de cisaillement. Elles sont transversales $\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0$. Elles ont pour célérité

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.80)$$

Les ondes planes de la deuxième famille sont les **ondes P** ou de compression, Elles sont longitudinales $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{k}$ et ont pour célérité

$$c_P^2 = \frac{2\lambda + \mu}{\rho}. \quad (1.81)$$

1.4 Propagation d'ondes électromagnétiques

1.4.1 Dérivation de l'équation d'ondes

Nous considérons un diélectrique de permittivité ε et de perméabilité μ . Ce diélectrique est le siège d'un phénomène de propagation d'ondes électromagnétiques qui peut être décrite à l'aide d'un champ électrique \mathbf{E} et d'un champ magnétique \mathbf{H} , de l'induction électrique \mathbf{D} et de l'induction magnétique \mathbf{B} . Ces champs sont reliés par les lois constitutives du matériaux

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (1.82)$$

et les le système d'équations de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t), \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{x}, t), \end{array} \right. \quad (1.83)$$

avec ρ la densité de charge électrique et \mathbf{j} le vecteur densité de courant. Afin de dériver l'équation d'ondes vectorielles portant sur l'induction électrique, nous éliminons des équations de Maxwell le champs électrique \mathbf{E} et magnétiques \mathbf{B}

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t), \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mu \mathbf{j}(\mathbf{x}, t), \end{array} \right. \quad (1.84)$$

On peut alors dériver la dernière équation de (1.84) par rapport au temps. On a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (1.85)$$

En remplaçant $\partial_t \mathbf{B}$ à l'aide de la troisième équation, on a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\mu \varepsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (1.86)$$

L'identité

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{D} - \Delta \mathbf{D} \quad (1.87)$$

nous permet d'écrire

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\mu \varepsilon} \Delta \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\mu \varepsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{D} - \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (1.88)$$

Nous remplaçons $\text{div}\mathbf{D}$ à l'aide de la deuxième équation de (1.84)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\mu\varepsilon} \Delta \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\mu\varepsilon} \text{grad } \rho(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (1.89)$$

avec c la célérité de l'onde qui est homogène à une vitesse

$$c^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}. \quad (1.90)$$

Chapitre 2

Le théorème de Hille-Yosida

Nous donnons ici les outils d'analyse fonctionnelle pour démontrer que l'équation des ondes scalaires est bien posée. Nous avons ici adapté les preuves du chapitre VII et X du livre *Analyse fonctionnelle : théorie et applications* de Hain Brézis au cas d'un terme source $f(t)$.

2.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard

Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard est certainement le résultat le plus connu portant sur les problèmes en domaine temporel. Nous en rappelons rapidement une version linéaire ainsi que sa démonstration

2.1.1 Cas général

Théorème 2.1 *Soit H un espace de Hilbert, $u_0 \in H$, $f \in C^0([0, +\infty[, H)$ et une application $A : H \rightarrow H$ uniformément Lipschitz. Le problème suivant admet une unique solution*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in C^1([0, +\infty[, H) \text{ tel que} \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \quad \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Remarque 2.2 *Rappelons qu'une application linéaire est uniformément Lipschitz ssi*

$$\|Au - Av\|_H \leq L\|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H. \quad (2.2)$$

Démonstration. Soit $\phi : C^0([0, +\infty[, H) \longrightarrow C^0([0, +\infty[, H)$ l'application définie par

$$\phi v(t) = u_0 + \int_0^t Av(s)ds + \int_0^t f(s)ds. \quad (2.3)$$

Remarquons que u est solution de (2.1) ssi u est point fixe de ϕ .

(i) Pour démontrer l'**existence** d'une solution de (2.1), nous allons démontrer, pour tout $T \geq 0$, l'existence et l'unicité d'un point fixe de ϕ dans l'espace de Banach

$$X_k^T = \{v \in C^0([0, T], H) : \|v\|_{X_k^T} < +\infty\} \quad (2.4)$$

avec

$$\|v\|_{X_k^T} = \sup_{t \in [0, T]} \|e^{-kt}v(t)\|_H. \quad (2.5)$$

Comme T est borné, l'application ϕ est bien défini en tant qu'application de X_k^T vers X_k^T . Montrons que ϕ est contractante sur X_k^T pour $k > L$

$$\begin{aligned} \|e^{-kt}(\phi u(t) - \phi v(t))\|_H &= \|e^{-kt} \int_0^t Au(s) - Av(s)ds\|_H \\ &\leq L e^{-kt} \int_0^t e^{ks} e^{-ks} \|u(s) - v(s)\|_H ds \\ &\leq L e^{-kt} \left(\int_0^t e^{ks} ds \right) \|u - v\|_{X_k^T} \\ &\leq \frac{L}{k} \|u - v\|_{X_k^T} \end{aligned} \quad (2.6)$$

On peut passer au sup sur t . Il suit

$$\|\phi u - \phi v\|_{X_k^T} \leq \frac{L}{k} \|u - v\|_{X_k^T}. \quad (2.7)$$

Comme $k > L$, l'application ϕ est bien contractante sur X_k^T . On utilise alors le théorème de point fixe de Picard

$$\exists! u_T \in X_k^T : \phi u_T(t) = u_T(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.8)$$

Remarquons que pour $T' > T > 0$, $u_{T'}|_{[0, T]} \in X_k^T$ et $\phi u_{T'}(t) = u_{T'}(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. Par unicité, on a l'identité suivante

$$\forall T' > T > 0 \quad u_{T'}(t) = u_T(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.9)$$

Il suit que

$$\forall T \geq t \quad u_T(t) = u_t(t). \quad (2.10)$$

Ceci nous permet de définir la fonction $u \in C^0([0, +\infty[, H)$ définie par

$$u : [0, +\infty[\longrightarrow H \quad t \longmapsto u(t) = u_t(t). \quad (2.11)$$

(ii) Pour montrer l'unicité, considérons deux solutions u et v de (2.1). On a comme u et v sont des points fixes de ϕ

$$u(t) - v(t) = \int_0^t Au(s) - Av(s) ds \quad (2.12)$$

Il suit

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_H ds \quad (2.13)$$

En notant $\psi(t) = \exp(-Lt) \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_H ds$, on a l'équation

$$\psi'(t) \leq 0, \psi(0) = 0 \text{ et } \psi(t) \geq 0 \implies \psi(t) = 0. \quad (2.14)$$

On peut conclure à l'unicité $u = v$.

2.1.2 Cas d'un opérateur linéaire positif

Théorème 2.3 Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire continu monotone. L'unique fonction $u \in C^1([0, +\infty[, H)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \quad \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.15)$$

vérifie

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H + \int_0^t \|f(\tau)\|_H d\tau \quad (2.16)$$

Preuve. La fonction u à valeurs dans H est donnée par la formule de la variation de la constante

$$u(t) = B(t) u_0 + \int_0^t B(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

avec $B \in C^\infty([-\infty, +\infty[, \mathcal{L}(H))$

$$B(t) = \exp(-At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^n t^n}{n!} \quad (2.18)$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|u(t)\|_{\mathbb{H}} \leq \|B(t)u_0\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \|B(t-\tau)f(\tau)\|_{\mathbb{H}} d\tau \quad (2.19)$$

La conclusion suit du lemme suivant qui affirme que $B(t)$ est contractant pour tout $t \geq 0$.

Lemme 2.4 *Soit $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ un opérateur linéaire continu monotone et $B(t) = \exp(-At)$. Pour tout $t \geq 0$, l'opérateur $B(t) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ est contractant*

$$\|B(t)u\|_{\mathbb{H}} \leq \|u\|_{\mathbb{H}} \quad \forall u \in \mathbb{H}. \quad (2.20)$$

Preuve. L'application $t \mapsto B(t)$ est définie à l'aide d'une série entière dont le rayon de convergence est infini. Elle est de classe $C^\infty([0, +\infty[, \mathcal{L}(\mathbb{H}))$ et vérifie

$$B(0) = I \quad \text{et} \quad \frac{dB(t)}{dt} + A B(t) = 0 \quad (2.21)$$

Pour tout $v \in \mathbb{H}$ indépendant du temps, on a

$$\left(\frac{dB}{dt}(t)v, B(t)v \right)_{\mathbb{H}} + \left(AB(t)v, B(t)v \right)_{\mathbb{H}} = 0 \quad (2.22)$$

Comme l'opérateur A est monotone. Il suit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|B(t)v\|_{\mathbb{H}}^2 \leq 0 \quad (2.23)$$

On déduit que l'opérateur $B(t)$ est contractant pour tout $t \geq 0$

$$\|B(t)v\|_{\mathbb{H}} \leq \|B(0)v\|_{\mathbb{H}} \leq \|v\|_{\mathbb{H}} \quad (2.24)$$

2.2 Enoncé du théorème de Hille-Yosida

Dans le cadre des problèmes aux limites le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard n'est d'aucun secours. La condition (2.2) est beaucoup trop contraignante pour pouvoir s'appliquer.

Le théorème de Hille-Yosida en propose une adaptation permettant de démontrer l'existence de solution à l'équation de la chaleur ou de l'équation des ondes.

Théorème 2.5 (Hille-Yosida) *Soient \mathbb{H} un espace de Hilbert, $f \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{H})$ et $A : D(A) \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ un opérateur non borné maximal monotone, $u_0 \in D(A)$. Le problème suivant admet une unique solution*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{H}) \cap C^0([0, +\infty[, D(A)) \text{ tel que} \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (2.25)$$

D'autre part, on a les inégalités d'énergie

Proposition 2.6 *Pour tout $t \geq 0$, la solution de (2.25) vérifie*

$$\begin{cases} \|u(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \|u_0\|_{\mathbf{H}} + \int_0^t \|f(s)\|_{\mathbf{H}} ds, \\ \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{\mathbf{H}} \leq \|Au_0\|_{\mathbf{H}} + \|f(0)\|_{\mathbf{H}} + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_{\mathbf{H}} ds, \\ \|Au(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \|Au_0\|_{\mathbf{H}} + \|f(0)\|_{\mathbf{H}} + \|f(t)\|_{\mathbf{H}} + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_{\mathbf{H}} ds. \end{cases} \quad (2.26)$$

2.3 Unicité de la solution

Soit $u \in C^1([0, +\infty[, \mathbf{H}) \cap C^0([0, +\infty[, D(\mathbf{A}))$ vérifiant

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(0) = 0. \quad (2.27)$$

Pour montrer l'unicité de la solution de (2.25), il nous suffit de montrer que $u = 0$.

Nous avons

$$\left(\frac{du}{dt}(t), u(t) \right)_{\mathbf{H}} + (Au(t), u(t))_{\mathbf{H}} = 0 \quad (2.28)$$

Comme \mathbf{A} est monotone on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u(t), u(t))_{\mathbf{H}} \leq 0 \quad (2.29)$$

On peut alors intégrer entre 0 et t , il suit

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \|u(0)\|_{\mathbf{H}}^2 = 0. \quad (2.30)$$

On a donc $u = 0$.

2.4 Régularisée de Yosida

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution de (2.25), on approche ici l'opérateur non borné \mathbf{A} maximal et monotone par un opérateur borné \mathbf{A}_λ monotone, avec $\lambda > 0$ un paramètre destiné à tendre vers 0.

On commence par définir l'opérateur $J_\lambda : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ qui approche l'opérateur identité

$$J_\lambda = (I + \lambda \mathbf{A})^{-1}. \quad (2.31)$$

D'après la remarque A.16, cet opérateur est bien défini. Son image et son noyau sont donnés par

$$R(J_\lambda) = D(\mathbf{A}), \quad N(J_\lambda) = \{0\} \quad (2.32)$$

Lemme 2.7 Les opérateurs $J_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ et $I - J_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ sont contractants

$$\forall u \in H \quad \|J_\lambda u\|_H \leq \|u\|_H \quad \text{et} \quad \|u - J_\lambda u\|_H \leq \|u\|_H \quad (2.33)$$

$$\forall u \in D(A) \quad \|u - J_\lambda u\|_H \leq \lambda \|Au\|_H \quad (2.34)$$

et J_λ converge fortement vers I

$$\forall u \in H \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda u = u \text{ dans } H. \quad (2.35)$$

Preuve. Soit $u \in H$ et $v = J_\lambda u \in D(A)$

$$v + \lambda Av = u \quad (2.36)$$

Il suit comme A est monotone et $\lambda > 0$

$$(v, v)_H + \lambda (Av, v)_H = (u, v)_H \implies (v, v)_H \leq (u, v)_H \quad (2.37)$$

On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\|v\|_H \leq \|u\|_H \text{ c'est à dire } \|J_\lambda u\|_H \leq \|u\|_H \quad (2.38)$$

D'autre part, on a

$$\|u - v\|_H^2 = \|u\|_H^2 - 2(u, v)_H + \|v\|_H^2 \quad (2.39)$$

En tenant compte de (2.37), on a

$$\|u - v\|_H^2 = \|u\|_H^2 - \|v\|_H^2 \leq \|u\|_H^2 \quad (2.40)$$

C'est à dire

$$\|u - J_\lambda u\|_H \leq \|u\|_H \quad (2.41)$$

Montrons (2.35) pour $u \in D(A)$. Soit $v = J_\lambda u$

$$\begin{aligned} v + \lambda Av = u &\implies v - u + \lambda A(v - u) = \lambda Au \\ &\implies v - u = J_\lambda(\lambda Au) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Comme J_λ est contractante on a

$$\|v - u\|_H \leq \lambda \|Au\|_H \quad \text{ie. } \|J_\lambda u - u\|_H \leq \lambda \|Au\|_H \quad (2.43)$$

On obtient donc

$$\forall u \in D(A) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda u = u \text{ dans } H. \quad (2.44)$$

Considérons maintenant $u \in H$. Comme $D(A)$ est dense dans H , il existe $u_\varepsilon \in D(A)$ tel que $\|u_\varepsilon - u\|_H \leq \varepsilon$. D'après l'inégalité triangulaire et comme J_λ est contractante on a

$$\begin{aligned}
\|J_\lambda u - u\|_H &= \|J_\lambda u - J_\lambda u_\varepsilon + J_\lambda u_\varepsilon - u_\varepsilon + u_\varepsilon - u\|_H \\
&\leq \|J_\lambda u - J_\lambda u_\varepsilon\|_H + \|J_\lambda u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_H + \|u_\varepsilon - u\|_H \\
&\leq \|J_\lambda u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_H + 2\|u_\varepsilon - u\|_H \\
&\leq \|J_\lambda u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_H + 2\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

On passe alors à la limite-sup et il suit

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \|J_\lambda u - u\|_H \leq 2\varepsilon. \tag{2.46}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on peut conclure

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \|J_\lambda u - u\|_H = 0 \implies \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|J_\lambda u - u\|_H = 0. \tag{2.47}$$

On définit maintenant la régularisée $A_\lambda : H \rightarrow H$ de A

$$A_\lambda = AJ_\lambda. \tag{2.48}$$

Corollaire 2.8 Soit $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Soit $J_{\lambda,\mu} = J_\lambda - J_\mu$. Pour tout $u \in H$, on a

$$\|J_{\lambda,\mu}\|_H \leq 2\|u\|_H \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} J_{\lambda,\mu} u = 0 \quad \forall u \in H. \tag{2.49}$$

$$\|J_{\lambda,\mu} u\|_H \leq (\lambda + \mu) \|Au\|_H \quad \forall u \in D(A) \tag{2.50}$$

Preuve. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|J_{\lambda,\mu} u\|_H \leq \|J_\lambda u - u\|_H + \|J_\mu u - u\|_H. \tag{2.51}$$

Il suit du lemme 2.7 les identités (2.49). Il suit de l'identité $u = J_\lambda u + \lambda AJ_\lambda u = J_\mu u + \mu AJ_\mu u$

$$J_{\lambda,\mu} u = \mu J_\mu A u - \lambda J_\lambda A u. \tag{2.52}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|J_{\lambda,\mu} u\| \leq \mu \|J_\mu A u\|_H + \lambda \|J_\lambda A u\|_H. \tag{2.53}$$

Comme J_λ et J_μ sont contractants, on a

$$\|J_{\lambda,\mu} u\| \leq \mu \|A u\|_H + \lambda \|A u\|_H. \tag{2.54}$$

Lemme 2.9 Pour tout $u \in D(A)$ on a

$$\|A_\lambda u\|_H \leq \|Au\|_H \quad (2.55)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} AJ_\lambda u = Au \text{ dans } H. \quad (2.56)$$

Preuve. La démonstration est basée sur l'identité suivante

$$AJ_\lambda v = J_\lambda Av \quad \forall v \in D(A). \quad (2.57)$$

On peut alors utiliser le lemme 2.7 pour conclure.

Lemme 2.10 On a $A_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ et

$$\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{1}{\lambda} \quad (2.58)$$

Preuve. Soit $v \in H$. De l'identité $J_\lambda v + \lambda AJ_\lambda v = v$ il suit

$$(J_\lambda v, AJ_\lambda v)_H + \lambda (AJ_\lambda v, AJ_\lambda v)_H = (v, AJ_\lambda v)_H \quad (2.59)$$

Comme A est monotone et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il suit

$$\lambda \|AJ_\lambda v\|_H^2 \leq \|v\|_H \|AJ_\lambda v\|_H \implies \lambda \|AJ_\lambda v\|_H \leq \|v\|_H. \quad (2.60)$$

Lemme 2.11 L'opérateur A_λ est monotone.

Preuve. Soit $u \in H$. De l'identité $u = J_\lambda u + \lambda AJ_\lambda u$, il suit

$$(A_\lambda u, u)_H = (AJ_\lambda u, J_\lambda u)_H + \lambda (AJ_\lambda u, AJ_\lambda u)_H \quad (2.61)$$

Comme A est monotone et $\lambda > 0$, on a

$$(A_\lambda u, u)_H \geq 0. \quad (2.62)$$

2.5 Définition et propriété de la régularisée u_λ de u

Lors de la dernière section, nous avons approché l'opérateur non borné maximal et monotone A par un opérateur borné et monotone A_λ .

Pour $\lambda > 0$, nous introduisons la solution de

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda u_\lambda(t) = f(t) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{et} \quad u_\lambda(0) = u_0. \quad (2.63)$$

Nous montrons ici que u_λ converge pour λ tendant vers 0 vers une solution de (2.25).

Comme $A_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard on introduit la fonction $u_\lambda \in C^1([0, +\infty[, H)$ qui vérifie (2.63)

Lemme 2.12 Pour $t \geq 0$ la solution de (2.63) vérifie

(i) si $u_0 \in H$ et $f \in C^0([0, +\infty[, H)$

$$\|u_\lambda(t)\|_H \leq \|u_0\|_H + \int_0^t \|f(s)\|_H ds, \quad (2.64)$$

(ii) si $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, H)$

$$\begin{cases} \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds, \\ \|A_\lambda u_\lambda(t)\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(0)\|_H + \|f(t)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds. \end{cases} \quad (2.65)$$

(iii) si $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^0([0, +\infty[, D(A))$

$$\begin{cases} \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(t)\|_H + \int_0^t \|Af(s)\|_H ds, \\ \|A_\lambda u_\lambda(t)\|_H \leq \|Au_0\|_H + \int_0^t \|Af(s)\|_H ds. \end{cases} \quad (2.66)$$

Preuve. (i) La fonction u_λ est donné à l'aide de la formule de la résolvante car l'opérateur A_λ est borné. On déduit de la section 3.107

$$\|u_\lambda(t)\|_H \leq \|u_0\|_H + \int_0^t \|f(t-\tau)\|_H d\tau \quad (2.67)$$

(ii) Remarquons ensuite que u_λ est $C^2([0, +\infty[, H)$ et en utilisant la même technique sur $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ qui vérifie

$$\frac{dv_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda v_\lambda(t) = \frac{df}{dt}(t) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{et} \quad v_\lambda(0) = -A_\lambda u_0 + f(0). \quad (2.68)$$

il suit

$$\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|A_\lambda u_0\|_H + \|f(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds \quad \forall t \geq 0 \quad (2.69)$$

Comme $u_0 \in D(A)$, il suit d'après (2.55)

$$\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds \quad \forall t \geq 0 \quad (2.70)$$

On a obtenu la première ligne de (2.65). La deuxième ligne de (2.65) provient de l'inégalité triangulaire et de (2.63).

Comme A est monotone on a alors

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda - u_\mu\|_H^2 \leq -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)_H \\ \leq (\|A_\lambda u_\lambda\|_H + \|A_\mu u_\mu\|_H) (\lambda \|A_\lambda u_\lambda\|_H + \mu \|A_\mu u_\mu\|_H). \end{cases} \quad (2.77)$$

D'après le lemme 2.12, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|_H^2 \leq 2(\lambda + \mu) C_T \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.78)$$

avec

$$C_T = \left(\|A u_0\|_H + \|f(0)\|_H + \|f(T)\|_H + \int_0^T \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\| ds \right)^2 \quad (2.79)$$

Par intégration il suit

$$\|u_\lambda - u_\mu\|_H^2 \leq 4(\lambda + \mu) T C_T \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.80)$$

Pour $\lambda \rightarrow 0$,

$$u_\lambda \text{ converge uniformément pour } t \leq T \text{ vers } u \in C^0([0, +\infty[, H). \quad (2.81)$$

Montrons que $\frac{du_\lambda}{dt}$ converge uniformément pour $t \leq T$ vers $\frac{du}{dt}$. Soit $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$. La fonction v_λ vérifie

$$\begin{cases} \frac{dv_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda v_\lambda(t) = \frac{df}{dt}(t) \text{ pour } t \geq 0 \\ v_\lambda(0) = -A_\lambda u_0 + f(0). \end{cases} \quad (2.82)$$

On obtient donc en soustrayant l'équation pour v_λ et v_μ

$$\begin{cases} \frac{d(v_\lambda - v_\mu)}{dt}(t) = -A_\lambda v_\lambda(t) + A_\mu v_\mu(t) \text{ pour } t \geq 0 \\ v_\lambda(0) - v_\mu(0) = -A_\lambda u_0 + A_\mu u_0. \end{cases} \quad (2.83)$$

On prend alors le produit scalaire de la première ligne contre $v_\lambda - v_\mu$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|_H^2 = (-A_\lambda v_\lambda + A_\mu v_\mu, v_\lambda - v_\mu)_H \text{ pour } t \geq 0 \quad (2.84)$$

On utilise alors que $v_\beta = J_\beta v_\beta + \beta A_\beta v_\beta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|_H^2 &= -(A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, J_\lambda v_\lambda - J_\mu v_\mu)_H \\ &\quad - (A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, \lambda A_\lambda v_\lambda - \mu A_\mu v_\mu)_H \quad \text{pour } t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Comme A est monotone et $A_\beta = AJ_\beta$ on a

$$(A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, J_\lambda v_\lambda - J_\mu v_\mu)_H = (A(J_\lambda v_\lambda - J_\mu v_\mu), J_\lambda v_\lambda - J_\mu v_\mu)_H \geq 0 \quad (2.86)$$

On a donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|_H^2 &\leq - (A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, \lambda A_\lambda v_\lambda - \mu A_\mu v_\mu)_H \\ &\leq \left(\|A_\lambda v_\lambda\|_H + \|A_\mu v_\mu\|_H \right) \left(\lambda \|A_\lambda v_\lambda\|_H + \mu \|A_\mu v_\mu\|_H \right). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Comme $u_0 \in D(A^2)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$, on peut alors appliquer le point (iii) du lemme 2.12 à v_β solution de (2.82)

$$\begin{cases} \|A_\lambda v_\lambda\|_H \leq \|AA_\lambda u_0\|_H + \|Af(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{dAf}{dt}(s) \right\|_H \\ \leq \|AAJ_\lambda u_0\|_H + \|Af(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{dAf}{dt}(s) \right\|_H \end{cases} \quad (2.88)$$

Comme $u_0 \in D(A^2)$, on a d'après l'identité (2.57)

$$\|A_\lambda v_\lambda\|_H \leq \|J_\lambda AAu_0\|_H + \|Af(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{dAf}{dt}(s) \right\|_H \quad (2.89)$$

Comme d'après le lemme 2.7 J_λ est contractant, il suit que pour $t \leq T$

$$\|A_\lambda v_\lambda\|_H \leq \|A^2 u_0\|_H + \|Af(0)\|_H + \int_0^T \left\| \frac{dAf}{dt}(s) \right\|_H ds \quad (2.90)$$

On a donc obtenu que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|_H^2 \leq 2(\lambda + \mu) C_T^A \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.91)$$

avec

$$C_T^A = \left(\|A^2 u_0\|_H + \|Af(0)\|_H + \int_0^T \left\| \frac{dAf}{dt}(s) \right\|_H ds \right)^2 \quad (2.92)$$

On peut alors intégrer entre 0 et $t \leq T$

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|_H^2 &\leq 4(\lambda + \mu)TC_T^A + \|v_\lambda(0) - v_\mu(0)\|_H^2 \\
&\leq 4(\lambda + \mu)TC_T^A + \|A_\lambda u_0 - A_\mu u_0\|_H^2 \\
&\leq 4(\lambda + \mu)TC_T^A + \left\|AJ_\lambda u_0 - AJ_\mu u_0\right\|_H^2
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Comme $J_\beta u + \beta A_\beta u = u$ on a

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|_H^2 &\leq 4(\lambda + \mu)TC_T^A + \|\lambda AA_\lambda u_0 - \mu AA_\mu u_0\|_H^2 \\
&\leq 4(\lambda + \mu)TC_T^A + (\lambda + \mu)^2 \|A^2 u_0\|_H^2
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Pour λ et μ tendant vers 0

$$\frac{du_\lambda}{dt} = v_\lambda \text{ converge uniformément pour } t \leq T \text{ dans } C^0([0, T], H). \tag{2.95}$$

Remarque 2.13 *C'est ici qu'est intervenu la condition $u_0 \in D(A^2)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$*

On déduit de (2.81) et (2.95) que $u \in C^1([0, +\infty[, H)$ et

$$u_\lambda \xrightarrow{\lambda(t) \rightarrow 0} u(t) \text{ et } \frac{du_\lambda}{dt}(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \frac{du}{dt}(t) \text{ dans } H. \tag{2.96}$$

Montrons maintenant que $A_\lambda u_\lambda(t)$ converge vers $Au(t)$.

Comme $A_\lambda u_\lambda(t) = f(t) - \frac{du_\lambda}{dt}(t)$, $A_\lambda u_\lambda$ converge d'après (2.96) dans H . Il suit de l'identité $A_\lambda = AJ_\lambda$ que

$$A(J_\lambda u_\lambda(t)) \text{ converge dans } H. \tag{2.97}$$

Montrons que $J_\lambda u_\lambda(t)$ converge vers $u(t)$ dans H . Comme J_λ est une contraction on a

$$\|J_\lambda u_\lambda - u\|_H \leq \|J_\lambda u_\lambda - J_\lambda u\|_H + \|J_\lambda u - u\|_H \leq \|u_\lambda - u\|_H + \|J_\lambda u - u\|_H \tag{2.98}$$

D'après (2.96) et le lemme 2.7, on a

$$J_\lambda u_\lambda \text{ converge vers } u \text{ dans } H. \tag{2.99}$$

D'après (2.97), (2.99) et comme A est fermé

$$u(t) \in D(A) \text{ et } A_\lambda u_\lambda(t) \text{ converge vers } Au(t) \text{ dans } H \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (2.100)$$

On peut alors passer à la limite sur (2.63). D'après (2.96) et (2.100), il existe $u \in C^1([0, +\infty[, H)$ qui vérifie

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } u(0) = u_0. \quad (2.101)$$

On a obtenu le théorème de Hille-Yosida.

Par passage à la limite sur (2.64) et (2.65) il suit (2.26) dans le cas où $u_0 \in D(A^2)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$.

2.7 Démonstration du théorème de Hille-Yosida dans le cas général où $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, H)$.

Rappelons que le théorème 2.5 et la proposition 2.6 ont été démontrés pour $u_0 \in D(A^2)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$. L'idée ici est d'approcher $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, H)$ par

$$J_\lambda u_0 \in D(A^2) \quad \text{et} \quad J_\lambda f \in C^1([0, +\infty[, D(A)). \quad (2.102)$$

Il existe une fonction $w_\lambda \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C^0([0, +\infty[, D(A))$ qui vérifie

$$\begin{cases} \frac{dw_\lambda}{dt}(t) + Aw_\lambda(t) = J_\lambda f(t) \in C^1([0, +\infty[, D(A)) \\ w_\lambda(0) = J_\lambda u_0 \in D(A^2). \end{cases} \quad (2.103)$$

Pour tout $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, on a

$$\begin{cases} \frac{d(w_\lambda - w_\mu)}{dt}(t) + A(w_\lambda - w_\mu)(t) = J_{\lambda,\mu} f(t) \quad \text{pour } t \geq 0 \\ w_\lambda(0) - w_\mu(0) = J_{\lambda,\mu} u_0. \end{cases} \quad (2.104)$$

avec

$$J_{\lambda,\mu} = J_\lambda - J_\mu. \quad (2.105)$$

Montrons que w_λ converge uniformément en temps vers une fonction $u \in C^0([0, +\infty[, H)$. D'après la proposition 2.6, on a les estimations suivantes

$$\|w_\lambda(t) - w_\mu(t)\|_H \leq \|J_{\lambda,\mu} u_0\|_H + \int_0^T \|J_{\lambda,\mu} f(s)\|_H ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.106)$$

Le lemme 2.8 nous permet d'écrire

$$\|J_{\lambda,\mu}u_0\|_H \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \|J_{\lambda,\mu}f(s)\|_H \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0} 0 \quad \forall s \in [0, T] \quad (2.107)$$

D'autre part, l'opérateur J_λ étant contractant, on a

$$\|J_{\lambda,\mu}f(s)\|_H \leq 2 \|f(s)\|_H \quad (2.108)$$

En appliquant le théorème de Lebesgues, il suit

$$\int_0^T \|J_{\lambda,\mu}f(s)\|_H ds \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0} 0. \quad (2.109)$$

Grâce à (2.106), (2.107) et (2.109), on obtient que, pour tout $T > 0$, $w_\lambda \in C^0([0, +\infty[, H)$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, T]$ vers $u \in C^0([0, +\infty[, H)$

$$w_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} u(t) \text{ dans } H. \quad (2.110)$$

(ii) D'après la proposition (2.26), on a les estimations suivantes

$$\left\| \frac{dw_\lambda}{dt}(t) - \frac{dw_\mu}{dt}(t) \right\|_H \leq \varphi_{\lambda,\mu}(T) \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.111)$$

avec

$$\varphi_{\lambda,\mu}(T) = \|AJ_{\lambda,\mu}u_0\|_H + \|J_{\lambda,\mu}f(0)\|_H + \int_0^T \left\| J_{\lambda,\mu} \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds \quad (2.112)$$

Comme $u_0 \in D(A)$ et $f(0) \in H$, et $\frac{df}{dt}(s) \in H$ pour tout $s \in [0, T]$ fixé, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \|AJ_{\lambda,\mu}u_0\|_H = \|J_{\lambda,\mu}Au_0\|_H \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0, \\ \|J_{\lambda,\mu}f(0)\|_H \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0, \\ \left\| J_{\lambda,\mu} \frac{df}{dt}(s) \right\|_H \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0. \end{array} \right. \quad (2.113)$$

Comme $\left\| J_{\lambda,\mu} \frac{df}{dt}(s) \right\|_H \leq 2 \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H$ on a d'après le théorème de Lebesgues

$$\int_0^T \left\| J_{\lambda,\mu} \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0. \quad (2.114)$$

On a donc obtenu

$$\varphi_{\lambda,\mu}(T) \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0. \quad (2.115)$$

On a donc obtenu la convergence uniforme dans H sur tout intervalle $[0, T]$ de $\frac{dw_\lambda}{dt}(t)$. D'après le point (i), il suit que $u \in C^1([0, +\infty[, H)$ et pour tout $t \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} u(t) \quad \text{dans H} \\ \frac{dw_\lambda}{dt}(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{du}{dt}(t) \quad \text{dans H} \end{array} \right. \quad (2.116)$$

(iii) D'après la proposition (2.26), on a les estimations suivantes

$$\|Aw_\lambda(t) - Aw_\mu(t)\|_H \leq \varphi_{\lambda,\mu}(T) + \|J_{\lambda,\mu}f(t)\|_H \quad (2.117)$$

Comme $f(t) \in H$ à t fixé, on a

$$\|J_{\lambda,\mu}f(t)\|_H \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0. \quad (2.118)$$

Il suit

$$\|Aw_\lambda(t) - Aw_\mu(t)\|_H \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0. \quad (2.119)$$

la convergence simple dans H de $Aw_\lambda(t)$ vers un élément $z(t) \in H$ pour tout $t \geq 0$. Comme A est fermé, on a donc obtenu que

$$u(t) \in D(A) \text{ et } Aw_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} Au(t) \text{ dans H.} \quad (2.120)$$

Par passage à la limite sur (2.103) il suit que $u \in C^1([0, +\infty[, H)$ vérifie (2.25).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_\lambda}{dt}(t) + Aw_\lambda(t) = J_\lambda f(t) \\ w_\lambda(0) = J_\lambda u_0. \end{array} \right. \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (2.121)$$

car comme $u_0 \in H$ et tout $t \geq 0$ $f(t) \in H$ on a d'après la proposition 2.7

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J_\lambda u_0 = u_0 \text{ et} \quad (2.122)$$

Enfin d'après (2.6), w_λ vérifie les inégalités

$$\left\{ \begin{array}{l} \|w_\lambda(t)\|_H \leq \|J_\lambda u_0\|_H + \int_0^t \|J_\lambda f(s)\|_H ds, \\ \left\| \frac{dw_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|AJ_\lambda u_0\|_H + \|J_\lambda f(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{dJ_\lambda f}{dt}(s) \right\|_H ds, \\ \|Aw_\lambda(t)\|_H \leq \|AJ_\lambda u_0\|_H + \|J_\lambda f(0)\|_H + \|J_\lambda f(t)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{dJ_\lambda f}{dt}(s) \right\|_H ds \end{array} \right. \quad (2.123)$$

Comme $AJ_\lambda u_0 = J_\lambda Au_0$ et $\frac{dJ_\lambda f}{dt}(s) = J_\lambda \frac{df}{dt}(s)$, le lemme 2.7 nous permet d'écrire

$$\begin{cases} \|w_\lambda(t)\|_H \leq \|u_0\|_H + \int_0^t \|f(s)\|_H ds, \\ \left\| \frac{dw_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds, \\ \|Aw_\lambda(t)\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(0)\|_H + \|f(t)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds \end{cases} \quad (2.124)$$

Par passage à la limite, on obtient (2.26). ceci termine la preuve

2.8 Notion de semi-groupe

Pour $f = 0$, on a associé à tout $u_0 \in D(A)$ une solution $u \in C^0([0, +\infty[; H)$ qui vérifie d'après (2.16)

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.125)$$

Par densité de $D(A)$ et comme toute limite uniforme d'une fonction continue est continue, on peut aussi associer à tout $u_0 \in H$ une solution $u \in C^0([0, +\infty[; H)$ qui vérifie (2.125). L'opérateur qui associe à u_0 la fonction u à valeurs dans H est noté S

$$S : H \mapsto C^0([0, +\infty[; H) \quad (2.126)$$

D'autre part, l'opérateur linéaire continue qui à $u_0 \in H$ associe $u(t)$ pour $t \geq 0$ est notée S_t

$$S_t : H \longrightarrow H \quad (2.127)$$

On déduit les propriétés de ces opérateurs par densité.

Proposition 2.14 (Propriété élémentaire du semi-groupe de résolution S) (i) Pour tout $t \geq 0$, on a

$$S_{t+s} = S_t S_s \text{ dans } \mathcal{L}(H) \quad (2.128)$$

$$S_0 = I \quad (2.129)$$

$$\|S_t\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad (2.130)$$

(ii) Pour tout $n \geq 0$, S est de classe $C^0([0, +\infty[; \mathcal{L}(D(A^n)))$.

(iii) La fonction $t \mapsto S_t$ est de classe $C^1([0, +\infty[; \mathcal{L}(D(A); H))$. Plus précisément, on a

$$\exists S'_t \in \mathcal{L}(D(A); H) \text{ tel que } \forall u_0 \in D(A) \quad \left\| S'_t u_0 - \frac{S_{t+\varepsilon} - S_t}{\varepsilon} u_0 \right\|_H \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \quad (2.131)$$

et

$$\forall u_0 \in H \quad \|S'_t u_0\|_H \leq \|A u_0\|_H \quad (2.132)$$

(iv) Pour tout n et $p \geq 0$. La fonction $t \mapsto S_t$ est de classe $C^p([0, +\infty[; \mathcal{L}(D(A^{n+p}); D(A^n)))$.

(v) Dans $\mathcal{L}(D(A); H)$, on a les identités suivantes

$$S'_t + S_t A = 0 \quad \text{et} \quad S_t A = A S_t. \quad (2.133)$$

Preuve. à terminer

Remarque 2.15 En général, la fonction $t \mapsto S_t$ n'est pas de classe $C^1([0, +\infty[; \mathcal{L}(H))$.

Proposition 2.16 (Formule de la résolvante) La solution du problème (2.25) peut s'écrire sous la forme

$$u(t) = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-s} f(s) ds. \quad (2.134)$$

Remarque 2.17 Cette formule nous permet de définir des solutions faibles de notre problème pour $u_0 \in H$ et $f \in C^0([0, +\infty[; H)$

Preuve. à terminer

Nous nous restreignons maintenant au cas où A est autoadjoint et nous nous intéressons à notion de solution hyperfaible. Celle-ci est définie par dualité.

à terminer

2.9 Exercices du chapitre 2

Exercice. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non borné tel que $A + \lambda I$ est maximal monotone, $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, H)$. Montrer que le problème suivant admet une unique solution

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C^0([0, +\infty[, D(A)) \text{ tel que} \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (2.135)$$

Exercice. Soit $u_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ montrer que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in C^1([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R})) \cap C^0([0, +\infty[, H^2(\mathbb{R})) \text{ tel que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (2.136)$$

Exercice. Soit $u_0 \in \mathcal{D}(]0, L[)$ montrer que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in C^1([0, +\infty[, L^2([0, L])) \cap C^0([0, +\infty[, H^2([0, L])) \text{ tel que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.137)$$

Exercice. Soient $u_0 \in \mathcal{D}(]0, L[)$ et $f \in \mathcal{D}([0, +\infty[_t \times \mathbb{R}_x)$. Montrer

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists! u \in C^1([0, +\infty[, L^2([0, L])) \cap C^0([0, +\infty[, H^2([0, L])) \text{ tel que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + u(x, t) = f(x, t) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.138)$$

Problème Soient $u_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $u_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Montrer que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists! u \in C^0([0, +\infty[, H^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0, +\infty[, H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C^2([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^2)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2 \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right. \quad (2.139)$$

1. Mettre ce problème sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} U \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C^0([0, +\infty[, D(A)) : \\ \frac{dU}{dt} + AU = 0 \quad \text{pour } t \geq 0, \\ U(0) = U_0. \end{array} \right. \quad (2.140)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} U(t) = (u(t), v(t) = \frac{du}{dt}(t))^T, \\ H = H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2), \\ D(A) = H^2(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2) \\ A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ -\Delta u \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.141)$$

2. Montrer que $A+I$ est monotone et maximal en tant qu'opérateur non borné de $H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$

3. Montrer (2.139).

Problème. Soit $u_0 \in D(A^2)$ et $f(t) = 0$. On cherche à montrer que la solution u de (2.25) vérifie

$$u \in C^0([0, +\infty[, D(A^2)) \cap C^1([0, +\infty[, D(A)) \cap C^2([0, +\infty[, H). \quad (2.142)$$

1. Montrer que l'application $u \mapsto Au$ définit un opérateur maximal monotone $A : D(A^2) \subset D(A) \rightarrow D(A)$.

2. En déduire

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists! v \in C^0([0, +\infty[, D(A^2)) \cap C^1([0, +\infty[, D(A)) \\ \frac{dv}{dt}(t) + Av(t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \\ v(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (2.143)$$

puis que $v = u$.

3. Montrer que $u \in C^2([0, +\infty[, H)$.

Problème. Dans de nombreuses applications, il est trop restrictif de considérer $u_0 \in D(A)$. Le but de ce problème est de considérer une condition initiale moins régulière dans le cas où A est auto-adjoint (ce ne sera jamais le cas pour les équations d'ondes). Soit A est un opérateur maximal, monotone, autoadjoint et $u_0 \in H$. On cherche à montrer le résultat suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists! u \in C^0([0, +\infty[, H) \cap C^1(]0, +\infty[, H) \cap C^1(]0, +\infty[, D(A)) : \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \text{ pour } t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \quad (2.144)$$

et les estimations pour tout $t > 0$

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H, \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H = \|Au(t)\|_H \leq \frac{1}{t} \|u_0\|_H \quad (2.145)$$

1. Soit $w_0 \in D(A^2)$. Montrer qu'il existe un unique

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C^0([0, +\infty[, D(A)) : \\ \frac{dw}{dt}(t) + Aw(t) = 0 \text{ pour } t > 0, \\ w(0) = w_0 \end{array} \right. \quad (2.146)$$

2. Montrer l'identité suivante

$$\frac{1}{2} \|w(T)\|_H^2 + \int_0^T (Aw, w)_H dt = \frac{1}{2} \|w_0\|_H^2 \quad (2.147)$$

3. Montrer l'identité suivante

$$\int_0^T t \left\| \frac{dw}{dt}(t) \right\|_H^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T t \frac{d}{dt} (Aw(t), w(t))_H dt = 0 \quad (2.148)$$

4. en déduire

$$\int_0^T t \left\| \frac{dw}{dt}(t) \right\|_H^2 dt + \frac{T}{2} (Aw(T), w(T))_H = \frac{1}{2} \int_0^T (Aw(t), w(t))_H dt \quad (2.149)$$

5. puis

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{w}(T)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^T t \left\| \frac{d\mathbf{w}}{dt}(t) \right\|_{\mathbf{H}}^2 dt + \frac{T}{2}(\mathbf{A}\mathbf{w}(T), \mathbf{w}(T))_{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{H}}^2 \quad (2.150)$$

6. Montrer que $t \mapsto \left\| \frac{d\mathbf{w}}{dt}(t) \right\|_{\mathbf{H}}$ est décroissante.

7. En déduire l'inégalité

$$\|\mathbf{w}(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{H}}, \quad \left\| \frac{d\mathbf{w}}{dt}(t) \right\|_{\mathbf{H}} = \|\mathbf{A}\mathbf{w}(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \frac{1}{t}\|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{H}} \quad (2.151)$$

8. Soit w_λ la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w}_\lambda \in C^1([0, +\infty[, \mathbf{H}) \cap C^0([0, +\infty[, D(\mathbf{A})) : \\ \frac{d\mathbf{w}_\lambda}{dt}(t) + \mathbf{A}\mathbf{w}_\lambda(t) = 0 \text{ pour } t > 0, \\ \mathbf{w}_\lambda(0) = (J_\lambda)^2 \mathbf{u}_0 \end{array} \right. \quad (2.152)$$

Soient T_1 et $T_2 > 0$. Montrer que $(J_\lambda)^2 \mathbf{u}_0 \in D(\mathbf{A}^2)$ puis montrer à l'aide de 7 que dans \mathbf{H}

- w_λ converge uniformément sur $[0, T_2]$.
- $\frac{d\mathbf{w}_\lambda}{dt}$ converge uniformément sur $[T_1, T_2]$.
- $\mathbf{A}\mathbf{w}_\lambda(t)$ converge uniformément sur $[T_1, T_2]$.

9. Montrer l'existence de \mathbf{u} vérifiant (2.144).

10. Montrer l'unicité de \mathbf{u} .

Problème. Soit $\mathbf{f} \in C^0([0, +\infty[, D(\mathbf{A}))$. Montrer

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists! \mathbf{u} \in C^1([0, +\infty[, \mathbf{H}) \cap C^0([0, +\infty[, D(\mathbf{A})) \text{ tel que} \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) + \mathbf{A}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.153)$$

Etablir les estimations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{\mathbf{H}} ds, \\ \left\| \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) \right\|_{\mathbf{H}} \leq \|\mathbf{f}(t)\|_{\mathbf{H}} + \int_0^t \|\mathbf{A}\mathbf{f}(s)\|_{\mathbf{H}} ds, \\ \|\mathbf{A}\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \int_0^t \|\mathbf{A}\mathbf{f}(s)\|_{\mathbf{H}} ds. \end{array} \right. \quad (2.154)$$

Chapitre 3

Condition aux limites transparentes

Par nature, le calcul numérique ne peut s'effectuer que sur des domaines bornés en espace (un ordinateur ne peut gérer qu'un nombre fini d'inconnues). Lorsque le domaine physique est non borné (c'est en général le cas pour les problèmes de propagation d'ondes), il faut alors trouver des méthodes pour pouvoir effectuer des calculs sur un sous-domaine borné.

Nous présentons dans ce chapitre deux techniques alternatives permettant de répondre à cette problématique : les conditions aux limites absorbantes ou CLA, les couches absorbantes parfaitement adaptées ou PML (perfectly matched layer). Nous présentons ces deux méthodes en dimension 1 d'espace puis en dimension supérieur.

3.1 Les Conditions aux limites absorbantes en dimension un

Nous considérons une équation d'ondes non-homogène

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t) \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.1)$$

dont les termes sources $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^∞ et dont le support sont inclus dans le borné $D =]-L, L[$ avec $L > 0$

$$f(x, t) = 0, \quad u_0(x) = 0 \text{ et } u_1(x) = 0 \text{ pour } x \notin D \text{ et } t \geq 0. \quad (3.2)$$

Hors du support de f , la solution de l'équation des ondes admet une forme propa-
gative

$$\begin{cases} u(x, t) = u_+(x - t) \text{ pour } x > L, \\ u(x, t) = u_-(x + t) \text{ pour } x < -L \end{cases} \quad (3.3)$$

Les fonctions u_+ et u_- sont des fonctions de classe C^∞ qui vérifient

$$u_+(s) = 0 \text{ pour } s \geq L \quad \text{et} \quad u_-(s) = 0 \text{ pour } s \leq -L. \quad (3.4)$$

Nous allons fermer le domaine de calcul en modélisant le comportement de la solution pour $x > L$ et $x < -L$ à l'aide de conditions aux limites en espace posées en $x = L$ et $x = -L$.

En observant la forme de la solution exacte, voir (3.3), on remarque qu'en $x = L$ et $x = -L$ on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(-L, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

On est alors amené à résoudre le problème équivalent

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t) \text{ pour } x \in] -L, L[\text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \text{ pour } x \in] -L, L[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(-L, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = 0 \text{ pour } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

La restriction de la solution du problème (3.1) à $x \in [-L, L]$ vérifie (3.6). Pour montrer que l'on peut calculer cette restriction en résolvant (3.6) il nous suffit de montrer que ce problème admet une unique solution.

Pour montrer que (3.6) admet une unique solution, nous allons appliquer le théorème de Hille-Yosida.

Nous commençons par effectuer une réduction d'ordre. Soient $v = \partial_t u$ et

$$U = (u, v)^T.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(x, t) - v(x, t) = 0 \\ \partial_t v(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t) \text{ pour } x \in]-L, L[\text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = u_1(x) \text{ pour } x \in]-L, L[\\ v(L, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad v(-L, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = 0 \text{ pour } t \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Nous avons

$$\frac{dU}{dt} + AU = F \quad (3.8)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} = H^1(I) \times L^2(I), \quad (I = [-L, L]) \\ D(A) = \left\{ (u, v) \in H^2(I) \times H^1(I) : v(L) = -d_x u(L) \text{ et } v(-L) = d_x u(-L) \right\}, \\ A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ -u'' \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Nous allons montrer que $A + I$ est maximal monotone

$$(AU, U)_H = -(v, u)_{H^1(I)} - (u'', v)_{L^2(I)} \quad (3.10)$$

Par intégration par partie, il suit

$$(AU, U)_H = -(v', u')_{L^2(I)} - (v, u)_{L^2(I)} + (u', v')_{L^2(I)} - d_x u(L)v(L) + d_x u(-L)v(-L). \quad (3.11)$$

En utilisant que $v(L) = -d_x u(L)$ et $v(-L) = d_x u(-L)$ on a

$$(AU, U)_H = -(v, u)_{L^2(I)} + (v(L))^2 + (v(-L))^2 \geq -(v, u)_{L^2(I)}. \quad (3.12)$$

Comme $-(v, u)_{L^2(I)} \leq (u, u)_{H^1(I)} + (v, v)_{L^2(I)}$. On obtient donc

$$((A + I)U, U)_H \geq 0 \quad (A + I \text{ est monotone}) \quad (3.13)$$

Montrons maintenant que $A + I$ est maximal. Il faut montrer que le problème suivant admet une solution

$$U \in D(A) : AU + 2U = F \quad (3.14)$$

avec $F = (f, g) \in H = H^1(I) \times L^2(I)$. Cette équation s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^2(I) \text{ et } v \in H^1(I) \\ -v + 2u = f \in H^1(I) \\ -u'' + 2v = g \in L^2(I) \\ v(L) = -u'(L) \\ v(-L) = u'(-L) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

On peut facilement découpler ce système en éliminant $v = 2u - f$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^2(I) \\ -u'' + 4u = 2f + g \in L^2(I), \\ u'(L) + 2u(L) = f(L), \\ u'(-L) - 2u(-L) = -f(-L). \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Ce problème admet la formulation variationnelle suivante

$$u \in H^1(I) : a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in H^1(I) \quad (3.17)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u, w) = \int_{-L}^L u'(x)w'(x) + 4u(x)w(x)dx + 2u(L)w(L) + 2u(-L)w(-L) \\ l(w) = \int_{-L}^L (2f(x) + g(x))w(x)dx + f(L)w(L) + f(-L)w(L) \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure à l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.17).

On peut alors se poser la question de la reconstruction de la solution sur tout \mathbb{R} à partir de sa restriction. Elle est basée sur (3.3). Hors de $x \in [-L, L]$, $u(x, t)$ est donné si $|x| - L > ct$ par $u(x, t) = 0$ et sinon par

$$\begin{cases} u(x, t) = u(L, t - \frac{x-L}{c}) \text{ pour } x > L, \\ u(x, t) = u(-L, t + \frac{x+L}{c}) \text{ pour } x < -L. \end{cases} \quad (3.19)$$

Sa simplicité et son efficacité (cette condition est exacte) rend cette condition aux limites incontournable en dimension 1. Le développement de nouvelles conditions transparentes approchées ne peut alors se justifier d'un point de vue pratique qu'en dimension supérieure ou égale à 2. Toutefois nous allons introduire les PML en dimension 1 afin de suivre une démarche la plus constructive possible

3.2 Les couches absorbantes parfaitement adaptées en dimension un

Afin de légèrement simplifier la présentation nous nous limitons à $f \equiv 0$. Nous cherchons à poser le problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.20)$$

sur un domaine borné afin de le résoudre numériquement. L'approche adoptée ici consiste à entourer le domaine de calcul par un matériau absorbant qui modélisera le milieu extérieur.

Nous allons tout d'abord étudier la propagation d'ondes dans les milieux absorbants puis nous présenterons les formulation PML.

3.2.1 Propagation d'onde en milieu absorbant

Soit $I =]L_-, L_+[$ un intervalle avec $L_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $L_+ \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit σ un scalaire positif. L'équation des ondes amorties est obtenue en remplaçant

l'opérateur de dérivée en temps ∂_t dans l'équation des ondes par un opérateur de dérivée plus frottement $\partial_t + \sigma$. Afin de raccourcir les écritures nous notons

$$(\partial_t + \sigma)^2 u = \partial_t^2 u + 2\sigma \partial_t u + \sigma^2 u \quad (3.21)$$

L'équation des ondes amorties s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma \in C^\infty(I \times \mathbb{R}_+) \\ (\partial_t + \sigma)^2 u_\sigma(x, t) - c^2 \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Pour être bien posé cette équation doit être fermée par des conditions initiales et des conditions aux limites en espace (on n'a pas ici unicité de la solution de ce problème). Nous considérons cette équation sans ces conditions aux limites et proposons une paramétrisation de l'ensemble de ces solutions par deux fonctions de la droite réelle ($u_{\sigma,+}^{II}$ et $u_{\sigma,-}^{II}$).

La première étape de la résolution consiste à poser le changement de variable

$$u_\sigma(x, t) = u_\sigma^I(x, t) \exp(-\sigma t) \quad (3.23)$$

La fonction $u_\sigma^I(x, t)$ est solution d'une équation des ondes classique

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma^I \in C^\infty(I \times \mathbb{R}_+) \\ \partial_t^2 u_\sigma^I(x, t) - c^2 \partial_x^2 u_\sigma^I(x, t) = 0 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

La fonction u_σ^I peut donc la décomposer en deux termes le premier se propageant dans le sens x -croissant, le second dans le sens x -décroissant

$$u_\sigma^I(x, t) = u_{\sigma,+}^I(x - ct) + u_{\sigma,-}^I(x + ct). \quad (3.25)$$

On en déduit que

$$u(x, t) = \left(u_{\sigma,+}^I(x - ct) + u_{\sigma,-}^I(x + ct) \right) \exp(-\sigma t). \quad (3.26)$$

La deuxième étape consiste à remarquer qu'une décroissance en temps est équivalente à une décroissance dans la direction de propagation. Nous effectuons alors le changement de variable $u_{\sigma,+}^I(s) = u_{\sigma,+}^{II}(s) \exp(-\frac{\sigma s}{c})$ et $u_{\sigma,-}^I(s) = u_{\sigma,-}^{II}(s) \exp(\frac{\sigma s}{c})$, la fonction u peut s'écrire

$$u_\sigma(x, t) = u_{\sigma,+}^{II}(x - ct) \exp(-\frac{\sigma x}{c}) + u_{\sigma,-}^{II}(x + ct) \exp(\frac{\sigma x}{c}). \quad (3.27)$$

Nous adoptons afin de les notations suivantes

$$\begin{cases} u_{\sigma,+}(x, t) = u_{\sigma,+}^{II}(x - ct) \exp(-\frac{\sigma x}{c}), \\ u_{\sigma,-}(x, t) = u_{\sigma,-}^{II}(x + ct) \exp(\frac{\sigma x}{c}). \end{cases} \quad (3.28)$$

Remarquons que ces fonctions vérifient

$$\begin{cases} (\partial_t + \sigma + c\partial_x)u_{\sigma,+}(x, t) = 0, \\ (\partial_t + \sigma - c\partial_x)u_{\sigma,-}(x, t) = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

3.2.2 Relation de dispersion et ondes planes pour l'équation des ondes et dans la PML.

Nous allons nous intéresser à des solutions particulières, appelées ondes planes, de l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0. \quad (3.30)$$

et de l'équation des ondes amorties

$$(\partial_t + \sigma)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 \quad (3.31)$$

qui admettent la forme

$$u(x, t) = \exp(i\omega t + kx) \text{ et } u_\sigma(x, t) = \exp(i\omega t + k_\sigma x). \quad (3.32)$$

Afin que ces ondes soient solutions de l'équation des ondes on a les relations de dispersions pour l'équation des ondes

$$(i\omega)^2 - (ik)^2 = 0 \iff k = \pm\omega \quad (3.33)$$

et l'équation des ondes amorties

$$(i\omega + \sigma)^2 - (ik_\sigma)^2 = 0 \iff k_\sigma = \pm(\omega - i\sigma). \quad (3.34)$$

Nous notons

$$k = \omega \quad \text{et} \quad k_\sigma = \frac{i\omega + \sigma}{i\omega} k. \quad (3.35)$$

A ω fixé, pour chacun des deux modèles nous avons une onde plane se propageant dans le sens x croissant

$$u(x, t) = \exp(i\omega t - ikx) \quad \text{et} \quad u_\sigma(x, t) = \exp(i\omega t - ik_\sigma x) \quad (3.36)$$

et une onde plane se dirigeant dans le sens x décroissant

$$u(x, t) = \exp(i\omega t + ikx) \quad \text{et} \quad u_\sigma(x, t) = \exp(i\omega t + ik_\sigma x). \quad (3.37)$$

3.2.3 Construction de couche parfaitement adaptées

La formulation PML consiste à remplacer le milieu de propagation pour $|x| > L$ par un milieu absorbant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\partial_t + \sigma \right)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 \text{ pour } x < -L \text{ et } t \geq 0, \\ \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \text{ pour } x \in] -L, L[\text{ et } t \geq 0, \\ \left(\partial_t + \sigma \right)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 \text{ pour } x > L \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \text{ pour } x \in] -L, L[\end{array} \right. \quad (3.38)$$

Afin de fermer ce système d'équations il faut y ajouter des conditions de transmission à chacune des interfaces. Ces conditions s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma(L, t) = u(L, t) \\ \left(\partial_t + \sigma \right) \partial_x u(L, t) = \partial_t \partial_x u_\sigma(L, t). \end{array} \right. \quad (3.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma(-L, t) = u(-L, t) \\ \left(\partial_t + \sigma \right) \partial_x u_\sigma(-L, t) = \partial_t \partial_x u(-L, t). \end{array} \right. \quad (3.40)$$

La dérivation de ces conditions de transmission s'effectue en minimisant les réflexions apparaissant aux interfaces entre le milieu physique et la couche absorbante.

3.2.4 Troncature du domaine

La solution est atténuée de manière exponentielle à l'intérieur de la couche absorbante. Il est donc tout à fait raisonnable de fermer à distance finie cette couche absorbante par une condition de Dirichlet. Soit $L_\sigma > L$ la distance de troncature

du domaine.

$$\left\{ \begin{array}{l} u :]-L, L[\times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } u_\sigma : (]-L_\sigma, -L[\cup]L, L_\sigma[) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \text{ pour } x \in]-L, L[\text{ et } t \geq 0, \\ \left(\partial_t + \sigma \right)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 \text{ pour } |x| > L \text{ et } t \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.41)$$

avec les conditions de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma(L, t) = u(L, t) \\ \partial_t \partial_x u_\sigma(L, t) = \left(\partial_t + \sigma \right) \partial_x u(L, t). \end{array} \right. \quad (3.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma(-L, t) = u(-L, t) \\ \partial_t \partial_x u_\sigma(-L, t) = \left(\partial_t + \sigma \right) \partial_x u(-L, t). \end{array} \right. \quad (3.43)$$

les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = u_0(x) \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \text{ pour } x \in]-L, L[, \\ u_\sigma(x, 0) = 0 \quad \partial_t u_\sigma(x, 0) = 0 \text{ pour } |x| > L. \end{array} \right. \quad (3.44)$$

et les conditions aux limites en espace

$$u_\sigma(L_\sigma, t) = 0 \quad \text{et} \quad u_\sigma(-L_\sigma, t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (3.45)$$

En tronquant le domaine en $x = L_\sigma$, on génère une onde réfléchiée en $x = L_\sigma$. Cette onde sera elle aussi amortie à travers la couche absorbante et ne reviendra qu'avec une faible amplitude en $x = L$ où elle n'engendrera que peu de réflexion dans le milieu physique.

3.2.5 Etude de réflexion-transmission : PML non bornée

Une étude par onde plane permet de vérifier le caractère parfaitement adapté des couches PML. Afin de simplifier la présentation, nous allons considérer un

milieu propagatif en $x > 0$ et une seule couche PML localisée en $x < 0$.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 & \text{pour } x \geq 0, \\ (\partial_t + \sigma)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 & \text{pour } x \leq 0, \end{cases} \quad (3.46)$$

avec les conditions de transmission

$$\begin{cases} u(0, t) = u_\sigma(0, t) \\ (\partial_t + \sigma) \partial_x u(0, t) = \partial_t \partial_x u_\sigma(0, t). \end{cases} \quad (3.47)$$

Nous éclairons le domaine en $x = +\infty$ par une onde incidente d'amplitude 1

$$\exp(i\omega t + ikx) \quad (3.48)$$

A l'interface cette onde se transforme en une onde réfléchie du côté $x > 0$ et une onde transmise du côté $x < 0$

$$\begin{cases} u(x, t) = \exp(i\omega t + ikx) + R \exp(i\omega t - ikx), \\ u_\sigma(x, t) = T_\sigma \exp(i\omega t + ik_\sigma x) \end{cases} \quad (3.49)$$

avec k et σ qui sont définies par

$$k = \omega \quad \text{et} \quad k_\sigma = \frac{i\omega + \sigma}{i\omega} k. \quad (3.50)$$

Nous allons maintenant déterminer les amplitudes des ondes réfléchies et transmises R et T_σ à l'aide des conditions de transmission (3.55)

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma, \\ (i\omega + \sigma)ik - (i\omega + \sigma)ikR = i\omega(ik_\sigma)T_\sigma. \end{cases} \quad (3.51)$$

La relation (3.50) nous permet de simplifier ce système

$$T_\sigma = 1 + R \quad \text{et} \quad T_\sigma = 1 - R. \quad (3.52)$$

On obtient $T_\sigma = 1$ et $R = 0$. On conclut donc que la couche PML ne génère aucune réflexion et une transmission totale. C'est pourquoi on parle de caractère parfaitement adapté.

3.2.6 Etude de réflexion-transmission : PML bornée

Nous avons déjà annoncée qu'en tronquant la PML à distance finie, elle générerait une réflexion de faible amplitude. C'est ce que nous allons vérifier ici. Nous considérons une fonction u qui vérifie l'équation d'ondes sur la demi-droite $x > 0$

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad (3.53)$$

et sur l'intervalle $x \in [-L_\sigma, 0]$, avec $L_\sigma > 0$, la longueur de la PML,

$$\left(\partial_t + \sigma\right)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0. \quad (3.54)$$

A l'interface, la solution vérifie les conditions de transmission

$$\begin{cases} u_\sigma(0, t) = u(0, t) \\ \partial_t \partial_x u_\sigma(0, t) = \left(\partial_t + \sigma\right) \partial_x u(0, t). \end{cases} \quad (3.55)$$

La couche absorbante est terminée par une condition de Dirichlet

$$u_\sigma(-L_\sigma, t) = 0. \quad (3.56)$$

Soit $\omega > 0$. Nous considérons encore le cas d'un éclairage par une onde plane incidente d'amplitude 1

$$\exp(i\omega - ikx). \quad (3.57)$$

A l'interface cette onde génère une onde réfléchie dans le domaine $x > 0$ et une onde transmise dans le domaine $x < 0$ qui va elle-même générer une onde réfléchie en $x = -L$

$$\begin{cases} u(x, t) = \exp(i\omega t + ikx) + R \exp(i\omega t - ikx) \\ u_\sigma(x, t) = T_\sigma \exp(i\omega t + ik_\sigma x) \exp(\sigma x) + R_\sigma \exp(i\omega t - ik_\sigma x). \end{cases} \quad (3.58)$$

avec

$$k = \omega \quad \text{et} \quad k_\sigma = \frac{i\omega + \sigma}{i\omega} k. \quad (3.59)$$

Les conditions de transmission en $x = 0$ s'écrivent

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma + R_\sigma, \\ (i\omega + \sigma)(ik)(1 - R) = (i\omega)(ik_\sigma)(T_\sigma - R_\sigma). \end{cases} \quad (3.60)$$

Ce système se simplifie à l'aide de (3.59)

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma + R_\sigma, \\ 1 - R = T_\sigma - R_\sigma. \end{cases} \quad (3.61)$$

On a donc $T_\sigma = 1$ et $R = R_\sigma$. D'autre part en $x = -L_\sigma$, la condition aux limites s'écrit

$$T_\sigma \exp(-ik_\sigma L_\sigma) + R_\sigma \exp(ik_\sigma L_\sigma) = 0 \quad (3.62)$$

On obtient alors

$$R_\sigma = T_\sigma \exp(-2ik_\sigma L_\sigma) = \exp(-2ik_\sigma L_\sigma). \quad (3.63)$$

Il suit de (3.59)

$$R_\sigma = \exp(-2ik_\sigma L_\sigma) \exp(-2\sigma L_\sigma). \quad (3.64)$$

On a donc obtenu

$$T_\sigma = 1 \text{ et } R = R_\sigma \exp(-2\sigma L) \exp(-2ik_\sigma L). \quad (3.65)$$

On vérifie donc bien qu'en fermant la PML on génère une onde réfléchie dont l'amplitude est petite dès que σL est grand.

3.2.7 Coefficient d'absorption parabolique

Lorsque les PML sont discrétisées avec une méthode numérique (éléments finis, différences finies, ...) la discrétisation génère des réflexions au niveau du changement de milieu. C'est pourquoi en pratique, on préfère souvent un coefficient d'absorption dépendant de la variable x au coefficient d'absorption constant. Le profil parabolique, défini ci dessous, est particulièrement efficace en pratique. La fonction σ étant de classe C^1 ne génère que peu de réflexions au niveau de la discrétisation.

$$\begin{cases} \sigma(x) = \sigma_0 \frac{(x-L)^2}{2}, & \forall x > L, \\ = 0, & \forall x \in [-L, L], \\ = \sigma_0 \frac{(x+L)^2}{2}, & \forall x < -L. \end{cases} \quad (3.66)$$

Afin de simplifier les écritures on introduit la convention

$$\sigma(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.67)$$

Le coefficient d'absorption étant nul aux deux interfaces. On aura alors les deux conditions de transmission

$$u(L, t) = u_\sigma(L, t) \quad \text{et} \quad \partial_x u(L, t) = \partial_x u_\sigma(L, t). \quad (3.68)$$

D'autre part le bon point de vue consiste à utiliser un système d'ordre 1 et non d'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + \sigma(x))u_\sigma(x, t) - \partial_x v_\sigma(x, t) = 0, \\ (\partial_t + \sigma(x))v_\sigma(x, t) - \partial_x u_\sigma(x, t) = 0, \\ u_\sigma(-L_\sigma, t) = 0 \quad \text{et} \quad u_\sigma(L_\sigma, t) = 0, \\ u_\sigma(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u_\sigma(x, 0) = u_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (3.69)$$

avec u_0 et u_1 à support dans $[-L, L]$.

3.3 Les couches absorbantes parfaitement adaptées en dimension $n \geq 2$

Une première idée consiste à remplacer le domaine propagatif pour $|x| > L$ par une couche absorbante. Cette idée, bien que séduisante, est vouée à l'échec car elle provoque des réflexions à la frontière entre la couche absorbante et le domaine physique. Dans les années 90 Alain Bamberger a proposé des couches absorbantes parfaitement adaptées qui permettent de ne générer aucune réflexion parasite. C'est cette approche que nous présentons ici.

A partir de la dimension 2, il faut borner le domaine dans plusieurs directions d'espace. Nous allons tout d'abord borner le domaine dans une direction. Puis nous montrerons comment borner le domaine selon plusieurs directions simultanément.

3.3.1 Les couches absorbantes de Béranger

On repère le point x par ses coordonnées

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x') \quad \text{avec } x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (3.70)$$

On note $\Delta' = \sum_{i=2}^n \partial_i^2$. On a

$$\Delta u(x) = \partial_1^2 u(x) + \Delta' u(x). \quad (3.71)$$

On effectue la décomposition suivante de la solution

$$u = u^1 + u', \quad (3.72)$$

avec

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^1 + \partial_1^2 u^1 = 0, \\ \partial_t^2 u' + \Delta' u' = 0 \end{cases} \quad (3.73)$$

ou de manière équivalente

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^1 + \partial_1^2 u^1 = -\partial_1^2 u', \\ \partial_t^2 u' + \Delta' u' = -\Delta' u^1. \end{cases} \quad (3.74)$$

La première équation peut être interprétée comme une équation d'ondes dans la direction x avec un terme source. La seconde est une équation de propagation d'ondes dans le plan orthogonal au vecteur unitaire e_x avec terme source. Plutôt que d'introduire un terme d'amortissement dans ces deux équations, Alain Bamberger a eu l'idée de ne rajouter ce terme que sur la partie en x de ce système. On aboutit au système PML

$$\begin{cases} (\partial_t + \sigma)^2 u_\sigma^1 - \partial_1^2 u_\sigma^1 = \partial_1^2 u_\sigma', \\ \partial_t^2 u_\sigma' - \Delta' u_\sigma' = \Delta' u_\sigma^1, \end{cases} \quad (3.75)$$

avec $\sigma > 0$ le paramètre d'absorption.

3.3.2 Relation de dispersion dans le domaine de propagation et dans la PML

Nous supposons que la solution admet la forme suivante

$$u(x, t) = \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik' \cdot x') \quad (3.76)$$

et nous cherchons la relation qui relie $\omega \in \mathbb{R}^+$, $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dans le domaine propagatif, cette onde satisfait

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_1^2 u(x, t) - \Delta' u(x, t) = 0. \quad (3.77)$$

On obtient donc

$$\left(-\omega^2 + k_1^2 + \|k'\|^2 \right) \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik' \cdot x') = 0. \quad (3.78)$$

On a donc la relation de dispersion pour le domaine propagatif

$$k_1^2 + \|k'\|^2 = \omega^2. \quad (3.79)$$

Ainsi dans le domaine propagatif et à k' et ω fixé, la solution est décomposée en une onde se dirigeant dans le sens x croissant et une onde se dirigeant dans le sens x décroissant. Dans la suite, on notera k_1 le scalaire positif vérifiant (3.79)

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp(i\omega t - ik_1 x_1 + ik' \cdot x') \quad (\text{ondes propagatives sens } x \text{ croissant}), \\ \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik' \cdot x') \quad (\text{ondes propagatives sens } x \text{ décroissant}). \end{array} \right. \quad (3.80)$$

Dans la couche absorbante, on recherche la solution sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1} x_1 + ik' \cdot x'), \\ u^1(x, t) = \alpha_1 \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1} x_1 + ik' \cdot x'), \\ u'(x, t) = \alpha' \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1} x_1 + ik' \cdot x'). \end{array} \right. \quad (3.81)$$

Afin d'obtenir la relation de dispersion, on écrit le système PML

$$\begin{cases} u(x, t) = u^1(x, t) + u'(x, t), \\ (\partial_t + \sigma)^2 u^1(x, t) - \partial_1^2 u(x, t) = 0, \\ \partial_t^2 u'(x, t) - \Delta' u(x, t) = 0. \end{cases} \quad (3.82)$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} (i\omega + \sigma)^2 \alpha^1 + k_{\sigma,1}^2 &= 0, \\ (i\omega)^2 \alpha' + \|k'\|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

On modifie la première ligne pour obtenir

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 \alpha^1 + \frac{(i\omega)^2}{(i\omega + \sigma)^2} k_{\sigma,1}^2 &= 0, \\ (i\omega)^2 \alpha' + \|k'\|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Comme $\alpha^1 + \alpha' = 1$, il suit la relation de dispersion dans la PML

$$(i\omega)^2 + \frac{(i\omega)^2}{(i\omega + \sigma)^2} k_{\sigma,1}^2 + \|k'\|^2 = 0. \quad (3.85)$$

A ω et k' fixé, on a deux ondes planes amorties

$$\begin{cases} \exp(i\omega t - ik_{\sigma,1}x_1 + ik' \cdot x') & \text{(propagation dans le sens } x_1 \text{ croissant),} \\ \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1}x_1 + ik' \cdot x') & \text{(propagation dans le sens } x_1 \text{ décroissant),} \end{cases} \quad (3.86)$$

avec

$$k_{\sigma,1} = \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega}\right) k_1 \quad (3.87)$$

le complexe de partie réelle positive et de partie imaginaire négative.

3.3.3 Etude de réflexion-transmission par ondes planes : PML non bornée

Dans cette section nous montrons que la couche absorbante ne génère aucune réflexion lorsqu'elle est de longueur infinie. Nous considérons ici une situation simplifiée. Dans le demi-espace $x_1 > 0$, la fonction u vérifie une équation d'ondes

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad \text{pour } x_1 > 0. \quad (3.88)$$

Le demi-espace $x_1 < 0$ est constitué d'une couche absorbante

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma(x, t) = u_\sigma^1(x, t) + u'_\sigma(x, t), \\ (\partial_t + \sigma)^2 u_\sigma^1(x, t) - \partial_1^2 u_\sigma(x, t) = 0, \\ \partial_t^2 u'_\sigma(x, t) - \Delta' u_\sigma(x, t) = 0. \end{array} \right. \quad (3.89)$$

Ces deux domaines sont reliés par la condition de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, x', t) = u_\sigma(0, x', t), \\ (\partial_t + \sigma) \partial_x u(0, x', t) = \partial_t \partial_x u_\sigma(0, x', t). \end{array} \right. \quad (3.90)$$

Nous éclairons le demi-espace $x_1 > 0$ par une onde plane incidente de pulsation ω se propageant de le sens x_1 décroissant

$$\exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik' \cdot x') \quad \text{pour } x_1 > 0. \quad (3.91)$$

Au niveau de l'interface cette onde va se réfléchir et se transmettre pour donner naissance à une onde réfléchie et à une une onde transmise. La solution dans le demi-espace $x_1 > 0$ prend la forme

$$u(x, t) = \exp(i\omega t + k_1 x_1 + k' \cdot x') + R \exp(i\omega t - k_1 x_1 + ik' \cdot x'). \quad (3.92)$$

Dans le demi-espace $x_1 < 0$, la solution est seulement constituée par l'onde transmise

$$u_\sigma(x, t) = T_\sigma \exp(i\omega t - k_{\sigma,1} x_1 + ik' \cdot x'). \quad (3.93)$$

Les scalaires $k_1 > 0$ et $k_{\sigma,1}$ vérifient

$$k_1^2 = \omega^2 - \|k'\|^2 \quad \text{et} \quad k_{\sigma,1} = \frac{i\omega + \sigma}{i\omega} k_1. \quad (3.94)$$

Nous allons déterminer les amplitudes des ondes R et T_σ à l'aide des conditions de transmission (3.90). Après avoir divisé par $\exp(i\omega t)$ ces relations s'écrivent

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma, \\ (i\omega + \sigma)ik_1(1 - R) = (i\omega)ik_{\sigma,1}T_\sigma. \end{cases} \quad (3.95)$$

Il suit grâce à (3.94)

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma, \\ 1 - R = T_\sigma. \end{cases} \quad (3.96)$$

La résolution de ce système fournit $T_\sigma = 1$ et $R = 0$. La couche PML infinie ne génère aucune réflexion.

3.3.4 Etude de réflexion-transmission : PML bornée

Nous recommençons l'étude précédente dans le cas d'une PML bornée. Nous considérons une fonction solution (3.88), (3.89) pour $x_1 > 0$, de (3.90) pour $x_1 \in [-L_\sigma, 0]$ et qui vérifie d'autre part une condition de Dirichlet en $x_1 = -L_\sigma$

$$u_\sigma(-L_\sigma, x', t) = 0 \quad (3.97)$$

Le demi-espace $x_1 > 0$ est éclairé par une onde plane se propageant dans le sens x_1 décroissant

$$\exp(i\omega t + ik_1x_1 + ik' \cdot x') \quad (3.98)$$

A l'interface avec la PML, cette onde incidente donne naissance à une onde transmise et une onde réfléchie qui va elle-même se réfléchir en $x_1 = -L$. Dans le demi-espace $x_1 > 0$, nous avons

$$u(x, t) = \exp(i\omega t + ik_1x_1 + ik' \cdot x') + R \exp(i\omega t - ik_1x_1 + ik' \cdot x'). \quad (3.99)$$

De même dans la bande $x_1 \in [-L_\sigma, 0]$, nous avons

$$u(x, t) = T_\sigma \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1}x_1 + ik' \cdot x') + R_{\sigma,1} \exp(i\omega t - ik_1x_1 + ik' \cdot x') \quad (3.100)$$

Les conditions de transmission (3.90) s'écrivent alors

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma + R_\sigma, \\ (i\omega + \sigma)ik_1(1 - R) = (i\omega)ik_{\sigma,1}(T_\sigma - R_\sigma). \end{cases} \quad (3.101)$$

On en déduit à l'aide de la relation de dispersion

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma + R_\sigma, \\ 1 - R = T_\sigma - R_\sigma. \end{cases} \quad (3.102)$$

Il suit $T_\sigma = 1$ et $R = R_\sigma$. Pour conclure nous relierons T_σ et R_σ à l'aide de la condition de Dirichlet en $x = -L_\sigma$.

$$T_\sigma \exp(i\omega t - ik_{\sigma,1}L_\sigma + ik' \cdot x') + R_\sigma \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1}L_\sigma + ik' \cdot x') = 0. \quad (3.103)$$

En divisant par $\exp(i\omega t + ik' \cdot x')$ on a

$$T_\sigma \exp(-ik_{\sigma,1}L_\sigma) + R_\sigma \exp(ik_{\sigma,1}L_\sigma) = 0. \quad (3.104)$$

En tenant compte de $k_{\sigma,1} = k_1 \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega}\right)$, il suit

$$T_\sigma \exp\left(-ik_1L_\sigma - \frac{k_1\sigma L_\sigma}{\omega}\right) + R_\sigma \exp\left(ik_1L_\sigma + \frac{k_1\sigma L_\sigma}{\omega}\right) = 0 \quad (3.105)$$

On a donc obtenu

$$R_\sigma = \exp\left(-2ik_1L_\sigma - \frac{2k_1\sigma L_\sigma}{\omega}\right)T_\sigma. \quad (3.106)$$

On a donc obtenu toutes les amplitudes des ondes planes

$$\begin{cases} T_\sigma = 1, \\ R = \exp\left(-2ik_1L_\sigma\right) \exp\left(-\frac{2k_1\sigma L_\sigma}{\omega}\right), \\ R_\sigma = \exp\left(-2ik_1L_\sigma\right) \exp\left(-\frac{2k_1\sigma L_\sigma}{\omega}\right). \end{cases} \quad (3.107)$$

On remarque que la réflexion sera d'autant plus faible que le produit σL_σ est grand. D'autre part, le nombre d'ondes $k_1 \in [0, \omega]$ est d'autant plus petit que l'onde est rasante. La formule (3.107) révèle que plus l'onde est rasante plus elle est réfléchiée par la PML.

3.3.5 Les PML dans toutes les directions d'espace

Nous cherchons à calculer les valeurs de la fonction u solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.108)$$

dans le domaine

$$\Omega = [-L, L]^n \quad (3.109)$$

entouré par une couche PML $\Omega_\sigma \setminus \Omega$ avec

$$\Omega_\sigma = [-L_\sigma, L_\sigma]^n. \quad (3.110)$$

Nous allons reformuler ce problème en décomposant sa solution en n fonctions u^i vérifiant

$$\begin{cases} u(x, t) = u^1(x, t) + \cdots + u^n(x, t), \\ \partial_t^2 u^i(x, t) - \partial_i^2 u^i(x, t) = 0, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \end{cases} \quad (3.111)$$

avec

$$x = (x_1, \dots, x_n). \quad (3.112)$$

Dans la PML nous allons ajouter un terme d'absorption à l'équation régissant u^i si $|x_i| \geq L$. La PML est décomposée en n zones qui se recouvrent

$$\Omega_\sigma^i = \left\{ x \in \Omega_\sigma : |x_i| > L \right\}. \quad (3.113)$$

On note Ω^i le "complémentaire" de Ω_σ^i inclus dans le domaine de calcul

$$\Omega^i = \left\{ x \in \Omega_\sigma : |x_i| < L \right\}. \quad (3.114)$$

L'interface entre Ω_σ^i et Ω^i est notée

$$\Gamma^i = \left\{ x \in \Omega_\sigma : |x_i| = L \right\} \quad (3.115)$$

Le système PML s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma(x, t) = u_\sigma^1(x, t) + \cdots + u_\sigma^n(x, t), \\ \partial_t^2 u_\sigma^i(x, t) - \partial_i^2 u_\sigma(x, t) = 0, \quad \text{pour } x \in \Omega^i, \\ \left(\partial_t + \sigma \right)^2 u_\sigma^i(x, t) - \partial_i^2 u_\sigma(x, t) = 0, \quad \text{pour } x \in \Omega_\sigma^i, \\ \left(\partial_t + \sigma \right) \partial_i u_\sigma^i|_{\Omega^i}(x, t) = \partial_t \partial_i u_\sigma^i|_{\Omega_\sigma^i}(x, t), \quad \text{pour } x \in \Gamma_\sigma^i. \end{array} \right. \quad (3.116)$$

La PML est fermée à l'aide d'une condition aux limites par exemple de Dirichlet

$$u_\sigma(x, t) = 0, \quad \text{pour } x \in \partial\Omega_\sigma. \quad (3.117)$$

3.3.6 PML à profil parabolique

C'est la technique la plus souvent utilisée en pratique. Le bon point de vue est de revenir à la formulation d'ordre 1 de l'équation des ondes

$$u(x) = u^1(x) + \cdots + u^n(x) \quad \text{et} \quad v(x) = \begin{bmatrix} v^1(x) \\ \dots \\ v^n(x) \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

La formulation PML s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\partial_t + \sigma(x_i) \right) v^i(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \geq 0, \\ \left(\partial_t + \sigma(x_i) \right) u^i(x, t) = \partial_x v^i(x, t), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.119)$$

avec σ le profil d'absorption définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(s) = \sigma_0 \frac{(s-L)^2}{L_\sigma^2}, & \forall s > L, \\ = 0, & \forall s \in [-L, L], \\ = \sigma_0 \frac{(s+L)^2}{L_\sigma^2}, & \forall s < -L. \end{array} \right. \quad (3.120)$$

La couche PML est fermée par une condition de Dirichlet

$$u_\sigma(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\sigma \quad (3.121)$$

Le profil σ étant régulier aux interfaces de la PML, les fonctions u^i et v^i sont continues.

3.4 Les Conditions aux limites absorbantes en dimension $n \geq 2$

3.4.1 Présentation de quelques conditions aux limites absorbantes sur une surface plane

En dimensions n , de nombreux auteurs ont dérivé des conditions aux limites absorbantes. Nous présentons ici les conditions historiques d'Engquist et Majda [] qui ont proposé les conditions aux limites absorbantes suivantes et ont démontrés qu'elles étaient associées à des problèmes bien posés.

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad (3.122)$$

La condition aux limites absorbantes d'ordre i s'écrit en $x = -L$

$$\left(\partial_1 - \partial_x \right)^i u(-L, x', t) = 0 \quad (3.123)$$

La condition aux limites absorbantes d'ordre i s'écrit en $x = L$

$$\left(\partial_1 + \partial_x \right)^i u(L, x', t) = 0 \quad (3.124)$$

Les conditions absorbante d'ordre 1, 2 et 3 s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1 :} \quad (\partial_t - \partial_1)u(-L, x', t) = 0, \\ \text{Ordre 2 :} \quad (\partial_t^2 - 2\partial_1\partial_t + \partial_1^2)u(-L, x', t) = 0, \\ \text{Ordre 3 :} \quad (\partial_t^3 - 3\partial_1\partial_t^2 + 3\partial_1^2\partial_t - \partial_1^3)u(-L, x', t) = 0. \end{array} \right. \quad (3.125)$$

En pratique, il n'est pas facile de discrétiser des dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 en x_1 . C'est pourquoi, on remplacera les dérivées ∂_1^p pour $p > 1$ à l'aide de l'identité

$$\partial_1^2 u(x, t) = (\partial_t^2 - \Delta')u(x, t) \quad \text{avec } x \in \Omega \text{ et } t \geq 0. \quad (3.126)$$

Il suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1 :} \quad (\partial_t - \partial_1)u(-L, x_2, t) = 0, \\ \text{Ordre 2 :} \quad (2\partial_t^2 - 2\partial_1\partial_t - \Delta')u(-L, x_2, t) = 0, \\ \text{Ordre 3 :} \quad (4\partial_t^3 - 4\partial_1\partial_t^2 - 3\partial_t\Delta' + \partial_1\Delta')u(-L, x_2, t) = 0. \end{array} \right. \quad (3.127)$$

De même en $x_1 = -L$, on peut réécrire la condition aux limites absorbantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1 :} \quad (\partial_t + \partial_1)u(L, x_2, t) = 0, \\ \text{Ordre 2 :} \quad (2\partial_t^2 + 2\partial_1\partial_t - \Delta')u(L, x_2, t) = 0, \\ \text{Ordre 3 :} \quad (4\partial_t^3 + 4\partial_1\partial_t^2 - 3\partial_t\Delta' - \partial_1\Delta')u(L, x_2, t) = 0. \end{array} \right. \quad (3.128)$$

3.4.2 Caractère bien posé des CLA d'ordre 1

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $u_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$. On considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \\ \partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \text{ et } t \geq 0, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0, \quad \text{pour } x \in \partial\Omega \text{ et } t \geq 0, \\ \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{pour } x \in \Omega, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad \text{pour } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.129)$$

Nous allons montrer que ce problème admet une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+, H^1(\Delta, \Omega))$, avec $u \in H^1(\Delta, \Omega)$ ssi $u \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Nous notons $v(x, t) = \partial_t u(x, t)$. Le vecteur $U = (u, v)$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(x, t) - v(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(x, 0) = u_0(x) \\ \\ \partial_t v(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t v(x, 0) = u_1(x). \end{array} \right. \quad (3.130)$$

C'est à dire

$$\partial_t U(x, t) + AU(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad U(0) = U_0, \quad (3.131)$$

avec

$$AU(x, t) = \begin{bmatrix} -v & 0 \\ 0 & -\Delta u(x, t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U_0(x) = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \quad (3.132)$$

Nous posons

$$\left\{ \begin{array}{l} H = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ D(A) = \left\{ (u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) : \right. \\ \left. \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial_n u(x, t) + v(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \end{array} \right. \quad (3.133)$$

Il nous suffit de montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que l'opérateur $A + \alpha I$ est maximal et monotone

(i) Trouvons α tel que $A + \alpha I$ est monotone

$$\left(AU, U \right)_H = - \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) + v(x)u(x) dx - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx. \quad (3.134)$$

La formule de Green

$$\int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx + \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \partial_n u(x)v(x) dx \quad (3.135)$$

nous permet d'écrire

$$\left(AU, U \right)_H = - \int_{\partial\Omega} v(x)\partial_n u(x) dx - \int_{\Omega} v(x)u(x) dx. \quad (3.136)$$

d'où d'après la condition à la limite

$$\left(AU, U \right)_H = \int_{\partial\Omega} v^2(x) dx - \int_{\Omega} v(x)u(x) dx. \quad (3.137)$$

On a donc

$$\left(AU, U \right)_H \geq - \int_{\Omega} v(x)u(x) dx. \quad (3.138)$$

Comme $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient

$$\left(AU, U \right)_H \geq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2(x) dx \geq -\|u\|_H^2. \quad (3.139)$$

Ainsi l'opérateur $A + I$ est monotone

$$\left(AU + U, U \right)_H \geq 0. \quad (3.140)$$

(ii) Montrons que $A + I$ est maximal. Il nous faut démontrer que le problème suivant admet une solution $u \in H^1(\Delta, \Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ pour tout $f \in H^1(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} -v(x) + 2u(x) = f(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ -\Delta u + 2v(x) = g(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + v(x) = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.141)$$

Nous éliminons $v(x) = 2u(x) - f(x)$

$$\begin{cases} -\Delta u + 4u(x) = 2f(x) + g(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + 2u(x) = f(x) & \text{pour } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.142)$$

L'existence de la fonction u suit du théorème de Lax-Milgram appliqué à la formulation variationnelle : chercher $u \in H^1(\Omega)$ tel que pour tout $w \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx + 4 \int_{\Omega} u(x)w(x) dx = \int_{\Omega} (2f(x) + g(x))w(x) dx. \quad (3.143)$$

L'opérateur $A + I$ est donc maximal.

3.4.3 Calcul du coefficient de réflexion

Comme pour les PML nous effectuons ici une étude par onde plane. Le demi-espace $x_1 > 0$ est le siège d'un phénomène de propagation d'ondes

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad (3.144)$$

ou de manière équivalente

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_1^2 u(x, t) - \Delta' u(x, t) = 0. \quad (3.145)$$

Ce demi-espace est fermé en $x = 0$ par les conditions aux limites absorbantes d'Engquist et Majda d'ordre i

$$\left(\partial_t - \partial_x \right)^i u(0, x', t) = 0. \quad (3.146)$$

Nous éclairons le domaine par une onde plane se propageant dans le sens x -décroissant provenant de $x_1 = +\infty$

$$u(x_1, x', t) = \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik' \cdot x') + R \exp(i\omega t - ik_1 x_1 + ik' \cdot x') \quad (3.147)$$

La condition de transmission d'Engquist-Majda d'ordre i peut alors s'écrire

$$(i\omega - ik_1)^i + (i\omega + ik_1)^i R = 0. \quad (3.148)$$

Le coefficient de réflexion prend alors la forme suivante

$$R = -\frac{(\omega - k_1)^i}{(\omega + k_1)^i}. \quad (3.149)$$

En notant $\theta \in [0, \pi/2]$ l'angle d'incidence de l'onde plane (l'angle entre le vecteur k et e_1 , $\theta = 0$ pour une incidence normale et $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour une onde rasante), nous avons

$$\cos(\theta) = \frac{k_1}{\omega}. \quad (3.150)$$

Il suit

$$R = -\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}\right)^i = -\tan^{2i}\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (3.151)$$

Remarquons que le coefficient de réflexion est nul pour les ondes à incidence normales et 1 pour les ondes rasantes. D'autre part plus l'ordre de la CLA est élevé plus le coefficient de réflexion est petit.

3.4.4 Conditions aux limites sur une surface sphérique

Les conditions aux limites absorbantes d'Engquist et Majda (d'ordre supérieur ou égal à 2) peuvent poser des problèmes lorsque l'on doit borner le domaine dans plusieurs directions. La présence de coin peut en effet provoquer des instabilités numériques.

Une idée naturelle consiste à poser cette condition aux limites sur une sphère de rayon ρ . C'est cette approche qu'ont développé Bayliss et Turkel [].

Coordonnées polaires et sphériques. En dimension 2, nous notons $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ les coordonnées polaires

$$x_1 = r \cos(\theta) \quad \text{et} \quad x_2 = r \sin(\theta) \quad (3.152)$$

Le laplacien en coordonnée polaire s'écrit alors

$$\Delta u(x) = \left(\frac{1}{r} \partial_r r \partial + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \right) u(r, \theta). \quad (3.153)$$

En dimension 3, nous notons $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ les coordonnées sphériques

$$x_1 = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad x_2 = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad \text{et} \quad x_3 = r \cos(\theta). \quad (3.154)$$

Le laplacien en dimension 3 s'écrit

$$\Delta u(x) = \left(\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) + \frac{1}{r^2} \Delta' \right) (r, \theta, \varphi) \quad (3.155)$$

avec

$$\Delta' = \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta u) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \partial_\varphi^2 u \quad (3.156)$$

Les conditions aux limites absorbantes de Bayliss et Turkel Elles s'écrivent pour x sur la sphère $r = \rho$ et $t \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 u = \left(\partial_t + \partial_r + \frac{n-1}{2\rho} \right) u(x, t), \\ L_m u = \left(\partial_t + \partial_r + \frac{2p}{\rho} + \frac{n-1}{2\rho} \right) L_{m-1} u(x, t), \end{array} \right. \quad (3.157)$$

avec m l'ordre de la condition aux limites et n la dimension de l'espace \mathbb{R}^n sur lequel est posé l'équation des ondes Les deux premières s'écrivent en dimension 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 0 : } \left(\partial_t + \partial_r + \frac{1}{2r} \right) u(x, t) = 0, \\ \text{Ordre 1 : } \left(\partial_t + \partial_r + \frac{5}{2r} \right) \left(\partial_t + \partial_r + \frac{1}{2r} \right) u(x, t) = 0, \end{array} \right. \quad (3.158)$$

et en dimension 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 0 : } \left(\partial_t + \partial_r + \frac{1}{r} \right) u(x, t) = 0, \\ \text{Ordre 1 : } \left(\partial_t + \partial_r + \frac{3}{r} \right) \left(\partial_t + \partial_r + \frac{1}{r} \right) u(x, t) = 0. \end{array} \right. \quad (3.159)$$

3.5 Analyse des conditions de Bayliss et Turkel en dimension 3

Nous considérons une solution u de l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x) \exp(i\omega t) \quad (3.160)$$

Résolution de l'équation des ondes harmoniques sur une couronne par séparation de variable Nous allons appliquer ici une technique de séparation de variable. Au niveau mathématique, cette technique peut être justifiée à l'aide de la théorie des opérateurs autoadjoints. Nous adoptons le point de vue des praticiens qui permet de mieux faire ressortir les concepts sans s'attarder sur des points purement techniques.

Nous considérons une fonction $u(x, t) = w(x) \exp(i\omega t)$ qui vérifie l'équation des ondes dans une couronne de la forme

$$\rho_{min} \leq r \leq \rho. \quad (3.161)$$

La fonction w vérifie

$$\omega^2 w(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r w(r, \theta, \varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \Delta' w(r, \theta, \varphi) = 0. \quad (3.162)$$

Nous recherchons w sous la forme

$$w(r, \theta, \varphi) = f(r) Y(\theta, \varphi). \quad (3.163)$$

Il suit

$$\frac{\omega^2 r^2 f(r, \theta, \varphi) + \partial_r \left(r^2 \partial_r f(r) \right)}{f(r)} = - \frac{\Delta' Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)}. \quad (3.164)$$

Le membre de gauche ne dépend pas de θ et φ tandis que le membre de droite ne dépend pas de r . C'est pourquoi, ils sont tous les deux constants.

$$\frac{\omega^2 r^2 f(r, \theta, \varphi) + \partial_r \left(r^2 \partial_r f(r) \right)}{f(r)} = \lambda \quad (3.165)$$

et

$$- \frac{\Delta' Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = \lambda. \quad (3.166)$$

Le couple λ, Y est un mode propre du laplacien transverse $-\Delta'$. Il est alors bien connu que les valeurs propres sont de la forme

$$\lambda_\ell = \ell(\ell + 1) \quad \text{avec } \ell \in \mathbb{N}. \quad (3.167)$$

et que l'espace propre associé est de dimension $2\ell + 1$. On utilisera pour représenter les fonctions propres les harmoniques sphériques qui forment une base des fonction L^2 de la sphère

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad \text{avec } \ell \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \llbracket -\ell, \ell \rrbracket. \quad (3.168)$$

Les premières harmoniques sphériques sont données après normalisation

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \\ Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin(\theta)e^{-i\varphi}, \\ Y_1^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos(\theta), \\ Y_1^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin(\theta)e^{i\varphi}, \\ Y_2^{-2}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi}, \\ Y_2^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}, \\ Y_2^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_2^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, \\ Y_2^2(\theta, \varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}. \end{array} \right. \quad (3.169)$$

La partie radiale ne nécessite aucune fonction spéciale. Elle vérifie

$$\frac{\omega^2 r^2 f(r) + \partial_r (r^2 \partial_r f(r))}{f(r)} = \ell(\ell + 1) \quad (3.170)$$

Cette équation différentielle ordinaire étant d'ordre 2, l'espace vectorielle de ces solutions est d'ordre 2. Il est aussi bien connue que deux solutions sont données

par

$$f_{\ell,-}(r) = r^\ell \left(\frac{1}{r} d_r\right)^\ell \left(\frac{\exp(i\omega r)}{r}\right) \quad \text{et} \quad f_{\ell,+}(r) = r^\ell \left(\frac{1}{r} d_r\right)^\ell \left(\frac{\exp(-i\omega r)}{r}\right). \quad (3.171)$$

et sont proportionnelles aux fonction de Hankel demi entière. Dans la couronne $\rho_{min} < r < \rho$, la fonction $u(x, t)$ est donnée par

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(\alpha_{\ell,m} s_\ell(r) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) + \beta_{\ell,m} e_\ell(r) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \right). \quad (3.172)$$

avec

$$s_\ell(r, t) = r^\ell \left(\frac{1}{r} d_r\right)^\ell \left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r}\right) \quad (3.173)$$

et

$$e_\ell(r, t) = r^\ell \left(\frac{1}{r} d_r\right)^\ell \left(\frac{\exp(i\omega t + i\omega r)}{r}\right) \quad (3.174)$$

La première partie est une onde entrante car elle se propage dans le sens r décroissant. La deuxième partie est une onde sortante car elle se propage dans le sens r croissant.

Nous développons alors l'ensemble des termes radiaux. On obtient

$$\begin{cases} e_\ell(r, t) = \sum_{p=0}^{\ell} e_{\ell,p} \frac{\exp(i\omega r - i\omega t)}{r^{1+p}}, \\ s_\ell(r, t) = \sum_{p=0}^{\ell} s_{\ell,p} \frac{\exp(i\omega r + i\omega t)}{r^{1+p}} \end{cases} \quad (3.175)$$

Effet de la condition de Bayliss Turkel sur les ondes sortantes. Nous reprenons la configuration précédente et fermons le domaine à l'aide de la condition aux limites de Bayliss-Turkel. Nous allons ici étudier l'effet de la condition aux limites absorbantes de Bayliss-Turkel sur les termes sortants de (3.172). Commençons par remarquer

$$\left(\partial_t + \partial_r\right) \left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) = -\frac{p+1}{r} \left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) \quad (3.176)$$

La condition de Bayliss-Turkel d'ordre 0 appliquée à un terme sortant s'écrit donc

$$L_0 \left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) = -p \frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+2}}. \quad (3.177)$$

De même pour l'opérateur d'ordre 1, on a

$$L_1 \left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) = (-p)(1-p) \frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+3}}. \quad (3.178)$$

Puis par récurrence, il suit

$$L_m\left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) = (-p)(1-p)\cdots(m-p)\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+2+m}}. \quad (3.179)$$

Ainsi nous remarquons que pour $p \in \llbracket 0, m \rrbracket$,

$$L_m\left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) = 0. \quad (3.180)$$

On a donc

$$L_m(s_\ell) = 0 \quad \forall \ell \in \llbracket 0, m \rrbracket. \quad (3.181)$$

L'opérateur absorbant de Bayliss-Turkel d'ordre m est donc transparent pour les ondes sortantes d'ordre inférieure ou égale à m .

Chapitre 4

L'équation de Helmholtz dans l'espace libre

4.1 Introduction

Dans ce premier chapitre consacré aux phénomènes de propagation d'ondes établis, nous nous plaçons dans l'espace libre (ceci permet un exposé un peu moins technique des résultats à l'aide des fonctions de Green). Nous notons \square le d'Alembertien :

$$\square v(\mathbf{x}, t) = -\Delta v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t). \quad (4.1)$$

Nous nous intéressons aux problèmes de D'Alembert

$$\square v(\mathbf{x}, t)(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et } t \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

dont les solutions et les termes sources ont une dépendance temporelle harmonique

$$\begin{cases} v(\mathbf{x}, t) = \Re(u_k(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)), \\ g(\mathbf{x}, t) = \Re(f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)). \end{cases} \quad (4.3)$$

Les deux fonctions $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ sont appelées les phaseurs de la solution et du terme source. Ils sont reliés par l'équation de Helmholtz qui prend la forme

$$-\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}. \quad (4.4)$$

Privé de ses conditions initiales, le problème de d'Alembert est mal posé : il n'y a plus unicité de sa solution. En effet, les ondes planes sont solutions de l'équation des ondes homogène ($\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ avec $\|\mathbf{k}\| = \frac{\omega}{c}$)

$$u(\mathbf{x}, t) = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \quad (4.5)$$

De même, le problème de Helmholtz est lui aussi mal posé. Il est facile de construire des solutions homogènes en considérant les phaseurs des ondes planes

$$u_k(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (4.6)$$

D'autre part, il n'y a pas génériquement existence de solutions dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$ mais seulement dans un espace beaucoup plus grand : l'espace des fonctions localement H^1

$$H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3) = \left\{ u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} : \varphi u \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \right\}. \quad (4.7)$$

Dans ce chapitre, nous montrons comment il est possible de définir de manière naturelle une solution dite sortante de l'équation de Helmholtz en s'appuyant sur des arguments physiques. Nous présentons plus particulièrement les bases mathématiques de cette théorie sous trois points de vue équivalents : la condition de radiation de Sommerfeld, le principe d'amplitude limite, le principe d'absorption limite.

La condition de radiation de Sommerfeld Cette approche consiste à garantir l'unicité de la solution de l'équation de Helmholtz en imposant à l'infini à la solution de l'équation de Helmholtz la condition d'ondes sortantes ou de radiation de Sommerfeld qui s'écrit

$$\begin{cases} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{cases} \quad (4.8)$$

Formellement, ces deux conditions consistent à assurer que la solution admet le comportement suivant à l'infini

$$u_k(\mathbf{x}) = u_{\infty}\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \frac{\exp(i\|\mathbf{k}\|\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} + o_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right). \quad (4.9)$$

En domaine temporel, cette expression devient

$$v(\mathbf{x}, t) = \Re\left(u_{\infty}\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \frac{\exp(i\|\mathbf{k}\|\|\mathbf{x}\| - i\omega t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} + o_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right)\right). \quad (4.10)$$

Cette expression correspond à une onde sphérique se déplaçant à la vitesse $c > 0$ dans le sens $\|\mathbf{x}\|$ croissant.

Le but de la section 4.2 est de démontrer le théorème suivant

Théorème 4.1 *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact, il existe une unique fonction $u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ qui vérifie la condition de radiation de Sommerfeld (4.8) et l'équation de Helmholtz*

$$-\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.11)$$

Le principe d'amplitude limite Cette approche consiste à étudier le comportement en temps long de la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } t \geq 0, \\ v(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t v(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (4.12)$$

pour un terme source ayant une dépendance temporelle harmonique

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}, t) = \Re\left(f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\right) & \forall t \geq 0, \\ g(\mathbf{x}, t) = 0 & \forall t < 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

avec $\omega = kc$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact. Cette approche sélectionnera la solution sortante en introduisant de la causalité.

La section 4.3 donnera un cadre mathématique à cette approche. On y démontrera le théorème suivant

Théorème 4.2 *On a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| v(\mathbf{x}, t) - \Re\left(u_k(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\right) \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (4.14)$$

avec $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par le théorème 4.1.

Le principe d'absorption limite Cette technique consiste à introduire un petit paramètre d'absorption $\varepsilon > 0$. On définit alors la solution variationnelle de l'équation coercive

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{k+i\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R}^3) \text{ tel que :} \\ -\Delta u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - (k+i\varepsilon)^2 u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.15)$$

On fait alors tendre le coefficient d'absorption ε vers 0^+ pour définir la solution sortante de l'équation de Helmholtz. Du point de vue physique cette technique consiste à introduire le phaseur de la solution du problème d'ondes amorties

$$-\Delta v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{2\varepsilon}{c} \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 v(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) \quad (4.16)$$

Le terme de frottement introduit alors de la causalité et permet de sélectionner les ondes sortantes. L'objectif de la section 4.4 est de donner un cadre mathématique à ce principe en démontrant le résultat suivant

Théorème 4.3 *On a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| u_{k+i\varepsilon} - u_k \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (4.17)$$

avec $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par le théorème 4.1.

4.2 La condition de radiation de Sommerfeld

4.2.1 Fonction de Green et existence de solution sortante

Dans cette section nous démontrons l'existence d'une solution sortante de l'équation de Helmholtz à l'aide des fonctions de Green.

Lemme 4.4 *Si u et Δu sont dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ alors u est dans $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$*

Démonstration :

Soit B la boule de rayon R et B' la boule de rayon $2R$. Par densité, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que pour

$$\|\nabla u\|_{L^2(B)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(B')} + \|\Delta u\|_{L^2(B')} \right), \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \quad (4.18)$$

Soit χ une fonction $\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\chi(\mathbf{x}) = 1$ dans B et $\chi(\mathbf{x}) = 0$ hors de B' décroissante suivant r . D'après l'identité de Green, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \chi u\|^2 d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\chi u) \chi u d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \quad (4.19)$$

On peut alors évaluer le terme à la droite de l'égalité en développant le laplacien

$$\Delta(\chi u) = \chi \Delta u + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u + u \Delta \chi. \quad (4.20)$$

Il suit que

$$\chi \Delta(\chi u) = \chi^2 \Delta u + 2 \nabla \chi \cdot \nabla(\chi u) + (\chi \Delta \chi - 2 \nabla \chi \cdot \nabla \chi) u. \quad (4.21)$$

On peut alors injecter cette dernière expression dans (4.19)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \chi u\|^2 d\mathbf{x} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \chi^2 u \Delta u + 2 \nabla \chi \cdot \nabla(\chi u) u \\ &\quad + (\chi \Delta \chi - 2 \nabla \chi \cdot \nabla \chi) u^2 d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Comme $\|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq \|u\|_{L^2(B')} \|\Delta u\|_{L^2(B')} \\ &\quad + 2 C_1 \|\nabla \chi u\|_{B'} \|u\|_{L^2(B')} + C_2 \|u\|_{L^2(B')}^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec $C_1 = \|\nabla \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ et $C_2 = \|\Delta \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$. Comme $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq \frac{\|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}{2} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + 2 C_1^2 + C_2\right) \|u\|_{L^2(B)}^2 + \frac{\|\Delta u\|_{L^2(B)}^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Il suit que

$$\frac{\|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}{2} \leq \left(\frac{1}{2} + 2 C_1^2 + C_2\right) \|u\|_{L^2(B')}^2 + \frac{\|\Delta u\|_{L^2(B')}^2}{2}. \quad (4.25)$$

Comme $\chi = 1$ dans B , il suit

$$\|\nabla u\|_{L^2(B)} \leq \|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (4.26)$$

On déduit (4.18). Ceci termine la preuve de la proposition. ■

Pour tout $k \in \mathbb{C}$, on introduit la fonction $G_k : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$G_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} \quad (4.27)$$

Lemme 4.5 Pour tout $k \in \mathbb{C}$, la fonction G_k est une solution fondamentale de l'opérateur $-\Delta - k^2$, ie.

$$-\Delta G_k - k^2 G_k = \delta(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (4.28)$$

Démonstration :

Remarquons tout d'abord que G_k est un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ car $G_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Soit $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Nous raisonnons au sens des distributions

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \Delta G_k + k^2 G_k, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \int_{\mathbb{R}^3} G_k(\mathbf{x}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}) + k^2 \Phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \end{aligned} \right. \quad (4.29)$$

avec I_ε donné par

$$I_\varepsilon = \int_{\{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}} G_k(\mathbf{x}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}) + k^2 \Phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (4.30)$$

D'après la formule de Green, on a

$$\left\{ \begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}} G_k(\mathbf{x}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}) + k^2 \Phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}} (\Delta G_k(\mathbf{x}) + k^2 G_k(\mathbf{x})) \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\{\|\mathbf{x}\| = \varepsilon\}} G_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial r}(\mathbf{x}) - \frac{\partial G_k}{\partial r}(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} \end{aligned} \right. \quad (4.31)$$

Il ne nous reste plus qu'à évaluer la dernière ligne car $\Delta G_k(\mathbf{x}) + k^2 G_k(\mathbf{x}) = 0$ hors de l'origine. Comme Φ est C^∞ , on a

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) + O(\|\mathbf{x}\|) \quad \text{et} \quad \partial_r \Phi(\mathbf{x}) = O(1). \quad (4.32)$$

De même, la fonction de Green vérifie

$$G_k(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) \quad \text{et} \quad \partial_r G_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2} + O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right). \quad (4.33)$$

Il suit

$$\begin{cases} I_\varepsilon = - \int_{\{\|\mathbf{x}\|=\varepsilon\}} \frac{\Phi(0)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} + \int_{\{\|\mathbf{x}\|=\varepsilon\}} O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) ds_{\mathbf{x}} \\ = -\Phi(0) + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1) \end{cases} \quad (4.34)$$

Ainsi, on a

$$\langle \Delta G_k + k^2 G_k, \Phi \rangle = -\Phi(0) \quad (4.35)$$

Ceci termine la preuve. ■

Proposition 4.6 Soient $k \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact. La fonction $u_k(\mathbf{x}) = G_k * f(\mathbf{x})$ vérifie

$$\begin{cases} u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3), \\ -\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{cases} \quad (4.36)$$

Démonstration :

Par définition, la fonction $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ est donnée par

$$u_k(\mathbf{x}) = G_k * f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (4.37)$$

La théorie de la convolution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ nous permet d'obtenir que u_k est une solution de l'équation de Helmholtz inhomogène

$$-(\Delta + k^2)(G_k * f)(\mathbf{x}) = -(\Delta G_k + k^2 G_k) * f(\mathbf{x}) = \delta * f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (4.38)$$

Nous remarquons aussi que $u_k \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ d'après le lemme 4.4. Comme le support de f est borné, il existe un réel positif ρ tel que la boule de rayon ρ contienne le support de f . Pour tout \mathbf{y} dans le support de f et pour tout \mathbf{x} tel que $\|\mathbf{x}\| > 2\rho$, on a

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} + \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} - \|\mathbf{y}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} + \frac{2\rho}{2} - \rho \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}. \quad (4.39)$$

En majorant l'expression (4.37), il suit

$$|u_k(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{2\pi\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad (4.40)$$

On intègre cette expression sur la sphère de rayon R

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} \leq \frac{1}{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^2 = O_{R \rightarrow +\infty}(1). \quad (4.41)$$

De même, on a pour $\|\mathbf{x}\| > 2\rho$

$$\nabla u_k(\mathbf{x}) = \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} \left(ik - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right. \quad (4.42)$$

$$\left. \partial_r u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \left(ik - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right. \quad (4.43)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_r u_k(\mathbf{x}) - ik u_k(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \left(1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) ik f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \right. \quad (4.44)$$

Il suit l'inégalité

$$\left\{ \begin{aligned} |\partial_r u_k(\mathbf{x}) - ik u_k(\mathbf{x})| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} \\ &+ k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \left(1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) d\mathbf{y}. \end{aligned} \right. \quad (4.45)$$

Nous remarquons alors que

$$1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (4.46)$$

Il suit d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left| 1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right| \leq \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right\| \quad (4.47)$$

Comme

$$\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} = \left(\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \quad (4.48)$$

on a

$$\left| 1 - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|} \right| \leq \left| \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad (4.49)$$

D'où d'après l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| 1 - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right| \leq \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq 2 \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}. \quad (4.50)$$

On déduit de (4.39) et (4.45) que

$$\left| \partial_r u_k(\mathbf{x}) - ik u_k(\mathbf{x}) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + 2k\|\mathbf{y}\|)|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} \quad (4.51)$$

On déduit de (4.39)

$$\left| \partial_r u_k(\mathbf{x}) - ik u_k(\mathbf{x}) \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + 2k\|\mathbf{y}\|)|f(\mathbf{y})|}{\pi} d\mathbf{y} \right) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \quad (4.52)$$

En intégrant sur la sphère de rayon R , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \left| (\partial_r - ik) u_k(\mathbf{x}) \right|^2 ds_{\mathbf{x}} \leq \frac{4}{\pi R^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^2 \left(1 + \frac{k\rho}{2} \right)^2 \\ \phantom{\int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}}} = O_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{R^2} \right). \end{array} \right. \quad (4.53)$$

■

Pour déterminer le cadre fonctionnelle de la fonction u_k , nous avons besoin d'un résultat classique de la théorie du potentiel newtonien.

Proposition 4.7 Soient $G_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|}$, $H_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2}$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact. Les fonction $w_g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ et $h_g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$w_g(\mathbf{x}) = G_0 * g(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad h_g = H_0 * g \quad (4.54)$$

vérifie $w_g \in L^6(\mathbb{R}^3)$, $h_g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et

$$-\Delta w_g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \nabla w_g = -h_g. \quad (4.55)$$

Démonstration :

C'est un résultat classique de la théorie du potentiel newtonien dont on rappelle une preuve directe.

D'après la proposition 4.5, la fonction G_0 est une solution fondamentale du laplacien. D'autre part, on a $\nabla G_0 = -H_0$. Il suit que $w_g = G_0 * g$ vérifie (4.55). Montrons maintenant que w_g est dans $L^6(\mathbb{R}^3)$. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ une fonction qui vaut 1 au voisinage de 0 et 0 au voisinage de l'infini. Remarquons que d'après l'inégalité de convolution de Young ($g \in L^1(\mathbb{R}^3)$ car $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et g à support compact.

$$(\chi G_0) * g \in L^6(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad \chi G_0 \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad (4.56)$$

$$((1 - \chi)G_0) * g \in L^6(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad (1 - \chi)G_0 \in L^6(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^1(\mathbb{R}^3). \quad (4.57)$$

On en déduit que $w_g = \chi G_0 * g + ((1 - \chi)G_0) * g$ est dans $L^6(\mathbb{R}^3)$.

De même, on a $h_g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ car

$$(\chi H_0) * g \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad \chi H_0 \in L^1(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad (4.58)$$

$$((1 - \chi)H_0) * g \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad (1 - \chi)H_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^1(\mathbb{R}^3). \quad (4.59)$$

Ceci termine la preuve. ■

Proposition 4.8 *La fonction $u_k = G_k * f$ est dans l'espace*

$$u_k \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \quad u_k \in L^6(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \nabla \hat{u}_k \in L^2(\mathbb{R}^3). \quad (4.60)$$

avec $\hat{u}_k(\mathbf{x}) = u_k(\mathbf{x}) \exp(-ik\|\mathbf{x}\|)$

Démonstration :

Une borne supérieure de (4.37) est donnée par

$$\left| u_k(\mathbf{x}) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y} = w_{|f|}(\mathbf{x}) \quad (4.61)$$

On déduit de la proposition 4.7 que $u_k \in L^6(\mathbb{R}^3)$. Comme $-\Delta u_k - k^2 u_k = f$ dans \mathbb{R}^3 , il suit qu'à la fois u_k et Δu_k sont dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$. On déduit du lemme 4.4 que $u_k \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$.

Nous remarquons que

$$\exp(ikr) \nabla \hat{u}_k(\mathbf{x}) = \nabla u_k - ik u_k(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (4.62)$$

Cette expression se calcule à l'aide des formules de représentation

$$u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \nabla u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}). \quad (4.63)$$

$$\nabla G_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ikr)}{4\pi} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{ik}{\|\mathbf{x}\|} \right) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (4.64)$$

il suit que

$$\left\{ \begin{aligned} \exp(ikr) \nabla \widehat{u}_k(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &- ik \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \right. \quad (4.65)$$

En majorant, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \|\nabla \widehat{u}_k(\mathbf{x})\| &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} \\ &+ k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \left\| \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| d\mathbf{y}. \end{aligned} \right. \quad (4.66)$$

On déduit alors de (4.50) que

$$\|\nabla \widehat{u}_k(\mathbf{x})\| = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + 2k\|\mathbf{y}\|) |f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} = H_0 * g \quad (4.67)$$

avec $g(\mathbf{y}) = (1 + 2k\|\mathbf{y}\|) |f(\mathbf{y})|$ et $H_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2}$. Comme f est un élément de $L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact, g est aussi à support compact dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. D'après la proposition 4.7 il suit que $\nabla \widehat{u}_k \in L^2(\mathbb{R}^3)$. ■

4.2.2 Unicité de la solution sortante de l'équation d'Helmholtz

L'unicité de la solution sortante de l'équation provient du Théorème de Rellich :

Théorème 4.9 (Théorème de Rellich sur tout \mathbb{R}^3) Soit $k > 0$. Si $u_k \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ vérifie

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} &= O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} &= O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{aligned} \right. \quad (4.68)$$

alors la fonction u_k est identiquement nulle.

Démonstration :

Remarquons tout d'abord que $u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ d'après le lemme 4.4. D'autre part, ses trois dérivées partielles vérifient

$$\partial_i u_k \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \Delta \partial_i u_k + k^2 \partial_i u_k = 0. \quad (4.69)$$

D'après le lemme 4.4, il suit que $\partial_i u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$. Ainsi u_k est un élément de $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$. On a d'après la formule de Green

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla u_k(\mathbf{x})|^2 + \Delta u_k(\mathbf{x}) \overline{u_k(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \overline{u_k(\mathbf{x})} \partial_r u_k(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}. \quad (4.70)$$

Il suit

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla u_k(\mathbf{x})|^2 - k^2 |u_k(\mathbf{x})|^2 = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \overline{u_k(\mathbf{x})} (\partial_r - ik) u_k(\mathbf{x}) + ik |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (4.71)$$

On note $\widehat{u}_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\widehat{u}_k(\mathbf{x}) = \frac{u_k(\mathbf{x})}{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}. \quad (4.72)$$

Il suit de l'identité $\nabla \widehat{u}_k + ik \widehat{u}_k \widehat{e}_r = \exp(-ik\|\mathbf{x}\|) \nabla u_k$ que

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla \widehat{u}_k + ik \widehat{u}_k \widehat{e}_r|^2 - k^2 |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (4.73)$$

Ceci se simplifie en

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla \widehat{u}_k|^2 + ik \left(\widehat{u}_k \overline{\partial_r \widehat{u}_k} - \overline{\widehat{u}_k} \partial_r \widehat{u}_k \right) d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (4.74)$$

En prenant la partie imaginaire, on a

$$0 = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \overline{\widehat{u}_k} \partial_r \widehat{u}_k - \widehat{u}_k \overline{\partial_r \widehat{u}_k} + 2ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}} \quad (4.75)$$

On déduit alors que

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} ik \left(\overline{\widehat{u}_k} \partial_r \widehat{u}_k - \widehat{u}_k \overline{\partial_r \widehat{u}_k} \right) d\mathbf{x} = 2k^2 \int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} \quad (4.76)$$

et par conséquent

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla \widehat{u}_k|^2 + 2k^2 |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}} \quad (4.77)$$

En prenant la partie imaginaire de cette expression, on obtient

$$k \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |\widehat{u}_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = -\Im \left(\int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k(\mathbf{x}) \overline{\widehat{u}_k(\mathbf{x})} \right) ds_{\mathbf{x}} \quad (4.78)$$

D'après le théorème de Cauchy-Schwartz, on a

$$k \|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})}^2 \leq \|\partial_r \widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} \|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} \quad (4.79)$$

et par conséquent

$$\|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} \leq \frac{\|\partial_r \widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})}}{k}. \quad (4.80)$$

Comme $\widehat{u}_k(\mathbf{x}) = \exp(-ik\|\mathbf{x}\|)u_k(\mathbf{x})$, on déduit alors des conditions de radiation de Sommerfeld que

$$\|\partial_r \widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} = \|\partial_r u_k - ik u_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} = O_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{R} \right) \quad (4.81)$$

et d'après (4.80)

$$\|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} = O_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{R} \right). \quad (4.82)$$

En remarquant que d'après le théorème de Cauchy-Schwartz et (4.81) et (4.82)

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{R^2} \right) \quad (4.83)$$

on peut alors passer à la limite sur (4.77)

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \widehat{u}_k|^2 + 2k^2 |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (4.84)$$

Il suit que \widehat{u}_k et par conséquent u_k s'annulent sur tout \mathbb{R}^3 . ■

4.3 Le principe d'amplitude limite

Le problème (4.12) est bien posé d'après le théorème de Hille-Yoshida. Nous allons étudier le comportement en temps long de sa solution par l'intermédiaire d'une expression basée sur les fonctions de Green.

Lemme 4.10 Une solution fondamentale du d'alembertien $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ est la distribution G de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ est définie par

$$\langle G, \Phi \rangle = c \int_0^\infty \left(\int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\Phi(\mathbf{x}, \tau)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) d\tau. \quad (4.85)$$

Démonstration :

Le d'alembertien au sens des distributions de G est calculé par dualité

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \langle G, \square \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ = c \int_0^\infty \left(\int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{\square \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt \end{array} \right. \quad (4.86)$$

Il peut aussi être décomposé de la manière suivante

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi - \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) - \frac{1}{r^2} \Delta_\Gamma. \quad (4.87)$$

D'après la formule de Green sur la sphère, on a

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{\Delta_\Gamma \Phi(\mathbf{x}, \tau)}{4\pi \|\mathbf{x}\|^3} ds_{\mathbf{x}} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\Phi(\mathbf{x}, \tau)}{4\pi \|\mathbf{x}\|^3} \Delta_\Gamma(1) ds_{\mathbf{x}} = 0. \quad (4.88)$$

Soit $\bar{\Phi}(r, t)$ la valeur moyenne de Φ sur la sphère de rayon r

$$\bar{\Phi}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta, \varphi, t) \sin(\theta) d\theta d\varphi. \quad (4.89)$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_t^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial_t^2 \Phi(c\tau, \theta, \varphi, \tau)}{4\pi} \frac{\tau}{c} \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_r^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial_r^2 \Phi(c\tau, \theta, \varphi, \tau)}{4\pi} c\tau \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{2\partial_r \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{2\partial_r \Phi(c\tau, \theta, \varphi, \tau)}{4\pi} \sin(\theta) d\theta d\varphi. \end{array} \right. \quad (4.90)$$

On peut alors commuter l'intégrale et la dérivée seconde

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_t^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \frac{\tau}{c} \partial_t^2 \bar{\Phi}(c\tau, \tau), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_r^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = c\tau \partial_r^2 \bar{\Phi}(c\tau, \tau), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{2\partial_r \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} = 2\partial_r \bar{\Phi}(c\tau, \tau). \end{array} \right. \quad (4.91)$$

En sommant ces trois expressions, il suit

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\square\Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \frac{\tau}{c} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(c\tau, \tau) - c\tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(c\tau, \tau) - 2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(c\tau, \tau) d\tau. \quad (4.92)$$

On obtient

$$\langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \int_0^\infty \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(c\tau, \tau) - c^2 \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(c\tau, \tau) - 2c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(c\tau, \tau) d\tau. \quad (4.93)$$

Le calcul de cette intégrale s'effectue en introduisant la fonction

$$\Psi(r, t) = \frac{r}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}(r, t) - \bar{\Phi}(r, t) - r \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(r, t) \quad (4.94)$$

qui vérifie

$$\frac{d}{d\tau} \left(\Psi(c\tau, \tau) \right) = \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(c\tau, \tau) - c^2 \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(c\tau, \tau) - 2c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(c\tau, \tau). \quad (4.95)$$

Ainsi il suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} = \left[\Psi(c\tau, \tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=+\infty} = -\Psi(0, 0) \\ \phantom{\langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3}} = \overline{\Phi(0, 0)} = \Phi(0, 0). \end{array} \right. \quad (4.96)$$

C'est à dire

$$\square G(\mathbf{x}, t) = \delta_{\mathbf{x}} \delta_t \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}). \quad (4.97)$$

■

Lemme 4.11 *L'unique solution de (4.12) est donnée par*

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|<ct\}} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c})}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \quad (4.98)$$

Démonstration :

L'unique solution de (4.12) est donnée par

$$u(\mathbf{x}, t) = G * g(\mathbf{x}, t) \quad (4.99)$$

Le produit de convolution au sens des distributions est défini par

$$\langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \langle G \otimes g, \psi \rangle_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} \quad \text{avec } \psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \tau) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau) \quad (4.100)$$

C'est à dire

$$\left\{ \begin{aligned} \langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} &= c \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^4} g(\mathbf{y}, \tau) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau) d\mathbf{y} d\tau}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt \\ &= c \int_{\mathbb{R}^4} \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{g(\mathbf{y}, \tau) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt d\mathbf{y} d\tau \end{aligned} \right. \quad (4.101)$$

On effectue alors le changement de variable

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad t' = t + \tau, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y}, \quad \rho = ct. \quad (4.102)$$

On obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} &= \int_{\mathbb{R}^4} \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\rho\}} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\rho}{c}) \varphi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) d\rho d\mathbf{y} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\rho\}} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c}) \varphi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) d\rho d\mathbf{y} dt \end{aligned} \right. \quad (4.103)$$

On remarque alors que

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\rho\}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) ds_{\mathbf{x}} \right) d\rho = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{x}. \quad (4.104)$$

Il suit

$$\left\{ \begin{aligned} \langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} &= \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c}) \varphi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c})}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \right) \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \right. \quad (4.105)$$

D'où $G * g$ est donnée par

$$G * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c})}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}. \quad (4.106)$$

Enfin que $g(\mathbf{x}, t) = 0$ pour tout $t < 0$, on obtient (4.98). ■

Lemme 4.12 La solution du problème (4.12) est donnée par

$$u(\mathbf{x}, t) = \Re \left(u_k(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) \right) + r(\mathbf{x}, t). \quad (4.107)$$

avec

$$\begin{cases} u_k(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{y}) \exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}, \\ |r(\mathbf{x}, t)| &\leq \int_{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > ct} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \end{cases} \quad (4.108)$$

Démonstration :

Il nous faut tenir compte ici de la forme particulière du terme source

$$g(\mathbf{y}, t) = \Re(f(\mathbf{y}) \exp(-i\omega t)). \quad (4.109)$$

Il suit d'après le lemme 4.11

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) &= \Re\left(\exp(-i\omega t) \int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < ct} \frac{f(\mathbf{y}) \exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}\right) \\ &= \Re\left(\exp(-i\omega t) u_k(\mathbf{x})\right) + r(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (4.110)$$

avec

$$r(\mathbf{x}, t) = \Re\left(\exp(-i\omega t) \int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > ct} \frac{f(\mathbf{y}) \exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}\right). \quad (4.111)$$

Cette dernière fonction peut être majorée par

$$\int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > ct} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}. \quad (4.112)$$

Ceci termine la preuve. ■

On est en mesure de démontrer le principe d'amplitude limite

Théorème 4.13 *On a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\mathbf{x}, t) - \Re(\exp(-i\omega t) u_k(\mathbf{x}))\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (4.113)$$

Démonstration :

Il nous suffit de montrer

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|r(\cdot, t)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (4.114)$$

On remarque tout d'abord que

$$|r(\mathbf{x}, t)| \leq w_{|f|}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall t > 0 \quad (4.115)$$

avec $w_{|f|}$ défini par (4.54) qui vérifie d'après le lemme 4.7,

$$\|w_{|f|}\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} < +\infty. \quad (4.116)$$

D'autre part comme f est à support compact, on a

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \exists t_{\mathbf{x}} > 0 \quad \forall \mathbf{y} \notin B(\mathbf{x}, ct_{\mathbf{x}}) \quad f(\mathbf{y}) = 0. \quad (4.117)$$

Il suit que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et pour $t > t_{\mathbf{x}}$

$$r(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.118)$$

Ainsi, la fonction $r(\mathbf{x}, t)$ converge simplement pour t tendant vers l'infini. On peut alors appliquer le théorème de Lebesgues. ■

4.4 Le principe d'absorption limite

Proposition 4.14 Soient $k, \varepsilon > 0$ et f : une fonction de classe $L^2(\mathbb{R}^3)$ à support compact. La fonction

$$u_{k+i\varepsilon} = G_{k+i\varepsilon} * f = \int_{\Gamma} \frac{\exp((ik - \varepsilon)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)f(\mathbf{y})}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} ds_{\mathbf{y}} \quad (4.119)$$

est l'unique élément de $H^1(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$-\Delta u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - (k + i\varepsilon)^2 u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (4.120)$$

Démonstration :

D'après le lemme 4.5, $G_{k+i\varepsilon}$ est une fonction de Green de $-\Delta - (k + i\varepsilon)^2$. La fonction $u_{k+i\varepsilon} = G_{k+i\varepsilon} * f$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) + (k + i\varepsilon)^2 u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) = \left(\Delta G_{k+i\varepsilon} + (k + i\varepsilon)^2 G_{k+i\varepsilon} \right) * f(\mathbf{x}) \\ \hspace{15em} = -\delta * f(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}). \end{array} \right. \quad (4.121)$$

Pour $\|\mathbf{x}\| > 2r$ ($\text{support}(f) \subset B(0, r)$), on a d'après (4.39)

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}. \quad (4.122)$$

En majorant l'expression (4.119), il suit qu'au voisinage de l'infini

$$\left| u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{\exp(-\frac{\varepsilon\|\mathbf{x}\|}{2})}{2\pi\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad (4.123)$$

Il suit que la fonction $u_{k+i\varepsilon}$ est donc dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. On agit de même pour le gradient. On a

$$\nabla u_k(\mathbf{x}) = (\nabla G_{k+i\varepsilon}) * f \quad (4.124)$$

Comme $\nabla G_{k+i\varepsilon}$ est exponentiellement décroissant $u_{k+i\varepsilon}$ est $H^1(\mathbb{R}^3)$. ■

On est en mesure de démontrer le théorème 4.3 :

Démonstration :

nous remarquons tout d'abord que

$$G_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - G_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} \left(\exp(-\varepsilon\|\mathbf{x}\|) - 1 \right) \quad (4.125)$$

Il suit que

$$\begin{aligned} u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) &= (G_{k+i\varepsilon} - G_k) * f(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \left(\exp(-\varepsilon\|\mathbf{x}\|) - 1 \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.126)$$

On peut alors passer à la valeur absolue et majorer

$$\left| u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \left| \exp(-\varepsilon\|\mathbf{x}\|) - 1 \right| d\mathbf{y} \quad (4.127)$$

Comme $0 \leq \exp(-\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \leq 1$ on a $\left| \exp(-\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) - 1 \right| \leq 1$ et par conséquent

$$\left| u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) \right| \leq w_{|f|}(\mathbf{x}) \quad (4.128)$$

avec $w_{|f|}$ la fonction défini par (4.54) du lemme 4.7.

D'autre part on a pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{y} \in \text{supp}(f) \subset B(0, \rho)$

$$\left| \exp(-\varepsilon(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)) - 1 \right| \leq \left| \exp(-\varepsilon(\|\mathbf{x}\| - r)) - 1 \right| \quad (4.129)$$

Il suit de (4.127)

$$\left| u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) \right| \leq w_{|f|}(\mathbf{x}) \left| \exp(-\varepsilon(\|\mathbf{x}\| - r)) - 1 \right| \quad (4.130)$$

Comme $w_{|f|} \in L^6(\mathbb{R}^3)$ et que le terme de droite de (4.130) tend simplement vers 0 presque partout pour ε tendant vers 0, il suit du théorème de Lebesgues

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u_k - u_{k+i\varepsilon} \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (4.131)$$

■

4.5 Développement en champ lointain

Nous rappelons que f est une fonction de $L^2(\Omega)$ à support compact dans la boule de centre ρ

Théorème 4.15 *On a le développement suivant au voisinage de l'infini*

$$u_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} \left(u_\infty(\widehat{\mathbf{x}}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \right) \quad (4.132)$$

avec

$$\widehat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{et} \quad u_\infty(\widehat{\mathbf{x}}) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-ik\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (4.133)$$

et

$$|\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \frac{2\rho + 4k\rho^2}{\|\mathbf{x}\|} \int_{\Omega} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y}, \quad \text{for } \|\mathbf{x}\| \geq 2\rho. \quad (4.134)$$

Démonstration :

Soit

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{4\pi\|\mathbf{x}\|}{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)} u_k(\mathbf{x}) - u_\infty(\widehat{\mathbf{x}}) \quad (4.135)$$

Il nous faut montrer que ε tend vers 0 pour \mathbf{x} tendant vers $+\infty$. Comme $u_k = G_k * f$, on a

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \exp(ik(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|)) - \exp(-ik\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.136)$$

Ceci peut se réécrire en $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_1(\mathbf{x}) + \varepsilon_2(\mathbf{x})$ avec

$$\begin{cases} \varepsilon_1(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \left(\exp(ik(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|)) - \exp(-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ \varepsilon_2(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - 1 \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{cases} \quad (4.137)$$

Pour tout $\|\mathbf{x}\| \geq 2\rho$ et $\|\mathbf{y}\| \leq \rho$, on a $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \geq \rho$ et par conséquent

$$\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq 1 + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq 1 + \frac{\rho}{\rho} = 2. \quad (4.138)$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} A &= \left| \exp(ik(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|)) - \exp(-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \right| \\ &\leq \left| \exp(ik(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| + \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y})) - 1 \right| \end{cases} \quad (4.139)$$

Comme pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\exp(i\lambda) - 1| \leq |\lambda|$, on a

$$A \leq k \left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| + \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right| \quad (4.140)$$

Comme $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2$, il suit que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \left(\|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right)^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y})^2 \quad (4.141)$$

D'où, on a

$$\left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \left(\|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right)^2 \right| \leq \|\mathbf{y}\|^2 + \|\hat{\mathbf{x}}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \leq 2\|\mathbf{y}\|^2 \leq 2\rho^2 \quad (4.142)$$

D'autre part, pour $\|\mathbf{x}\| \geq 2\rho$ et $\|\mathbf{y}\| \leq \rho$, on a $\|\mathbf{y}\| \leq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}$

$$\left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}\| - \|\hat{\mathbf{x}}\| \|\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| \quad (4.143)$$

Par conséquent, on a

$$A \leq k \frac{\left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \left(\|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right)^2 \right|}{\left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \left(\|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right) \right|} \leq \frac{2k\rho^2}{\|\mathbf{x}\|} \quad (4.144)$$

On déduit donc que

$$|\varepsilon_1(\mathbf{x})| \leq \frac{4k\rho^2}{\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad \text{pour } \|\mathbf{x}\| \geq 2\rho. \quad (4.145)$$

De même, on a

$$|\varepsilon_2(\mathbf{x})| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - 1 \right| |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad (4.146)$$

Pour $\|\mathbf{x}\| \geq 2\rho$ et $\|\mathbf{y}\| \leq \rho$, on a

$$\left| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - 1 \right| = \frac{\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{2\rho}{\|\mathbf{x}\|} \quad (4.147)$$

Il suit que

$$|\varepsilon_2(\mathbf{x})| \leq \frac{2\rho}{\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad \text{pour } \|\mathbf{x}\| \geq 2\rho. \quad (4.148)$$

Ainsi $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_1(\mathbf{x}) + \varepsilon_2(\mathbf{x})$ vérifie

$$|\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \frac{2\rho + 4k\rho^2}{\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad \text{pour } \|\mathbf{x}\| \geq 2\rho. \quad (4.149)$$

Ceci termine la preuve. ■

Annexe A

Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

A.1 Les opérateurs linéaires non bornés

Dans cette section, H et H' désignent deux espace de Hilbert.

Définition A.1 On dit que l'application $A : D(A) \subset H \longrightarrow H'$ un opérateur linéaire non borné ssi

- (i) Le domaine de définition $D(A)$ de A est un sous-espace vectoriel de H
- (ii) L'image $R(A)$ de A est incluse dans H'
- (iii) L'application A est linéaire

$$A(u + \lambda v) = Au + \lambda Av \quad \text{pour tout } u, v \in D(A) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Définition A.2 Le graphe $G(A)$ d'un opérateur non borné $A : D(A) \subset H \longrightarrow H'$ est défini par

$$G(A) = \{(u, v) \in H \times H' : u \in D(A) \text{ et } v = Au\}. \quad (\text{A.2})$$

Dans la suite, nous munissons $H \times H'$ de du produit scalaire et de la norme

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} u \\ u' \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} v \\ v' \end{array} \right] \right)_{H \times H'} = \sqrt{(u, v)_H + (u', v')_{H'}^2}, \\ \left\| \begin{array}{c} u \\ u' \end{array} \right\|_{H \times H'} = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|u'\|_{H'}^2} \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

Définition A.3 Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H'$ un opérateur linéaire non borné. On dit que l'opérateur est fermé ssi son graphe est un sous-espace fermé de $H \times H'$.

Dit autrement, A est fermé ssi pour toute suite $u_n \in D(A)$ vérifiant

$$\exists u \in H, v \in H' \quad u_n \xrightarrow{H} u \quad \text{et} \quad Au_n \xrightarrow{H'} v' \quad (\text{A.4})$$

on a

$$u \in D(A) \quad \text{et} \quad Au = v'. \quad (\text{A.5})$$

Dit encore autrement, l'opérateur linéaire non borné $A : D(A) \subset H \longrightarrow H'$ est fermé ssi $D(A)$ muni du produit scalaire $(u, v)_{D(A)} = (u, v)_H + (Au, Av)_{H'}$ est un espace de Hilbert.

Définition A.4 On dit que $A : H \longrightarrow H'$ est un opérateur linéaire borné ssi c 'est une application linéaire continue de H vers H' .

Proposition A.5 Les opérateurs linéaires bornés sont des opérateurs linéaires non bornés fermés.

Preuve. Soit $A : H \longrightarrow H'$ un opérateur linéaire borné. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H vérifiant

$$\exists u \in H, v \in H' \quad u_n \xrightarrow{H} u \quad \text{et} \quad Au_n \xrightarrow{H'} v' \quad (\text{A.6})$$

Comme $D(A) = H$ et comme A est borné, il suit

$$u \in D(A) \quad \text{et} \quad u' = Au. \quad (\text{A.7})$$

Exemple A.6 1. Les opérateurs de dérivation $u(\mathbf{x}) \mapsto u^{(p)}(\mathbf{x})$, $p \geq 1$, de domaine $H^p(\mathbb{R})$, sont des opérateurs non bornés de $L^2(\mathbb{R})$. Ces opérateurs sont fermés car $H^p(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u^{(p)}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (\text{A.8})$$

2. Les opérateurs de dérivation $u(\mathbf{x}) \mapsto u^{(p)}(\mathbf{x})$, $p \geq 1$, de domaine $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, sont des opérateurs non bornés de $L^2(\mathbb{R})$. Ces opérateurs ne sont pas fermés car $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas complet muni de la norme (A.8).

3. Nous notons par ℓ^2 l'ensemble des suite de carré sommable

$$\ell^2 = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n u_n^2 < \infty \right\} \quad (\text{A.9})$$

Soit $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty \quad (\text{A.10})$$

L'opérateur, de domaine

$$\ell_\beta^2 = \left\{ (u_n) \in \ell^2 : \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n^2 u_n^2 < +\infty \right\},$$

défini par

$$(u_n) \mapsto (\beta_n u_n) \quad (\text{A.11})$$

est un opérateur linéaire non borné fermé de ℓ^2 .

4. Considéré sur l'ensemble des suites presque nulles

$$\mathcal{D} = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists N > 0 \quad \forall n \geq N \quad u_n = 0 \right\} \quad (\text{A.12})$$

l'opérateur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\beta_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un opérateur linéaire non borné de ℓ^2 . Cet opérateur n'est pas fermé car \mathcal{D} n'est pas complet pour la norme

$$\|u\|_{\ell_\beta^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \beta_n^2) u_n^2} \quad (\text{A.13})$$

Définition A.7 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H'$ un opérateur linéaire non borné injectif. L'inverse $A^{-1} : R(A) \subset H' \rightarrow H$ de A est l'opérateur qui associe à $u' \in R(A)$ l'unique $u \in D(A)$ qui vérifie

$$Au = u'. \quad (\text{A.14})$$

Proposition A.8 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H'$ est un opérateur linéaire fermé non borné injectif d'image $R(A)$. Son inverse $A^{-1} : R(A) \subset H' \rightarrow H$ est un opérateur linéaire non borné fermé.

Preuve. On remarque que $G(A^{-1}) = i(G(A))$ avec i l'application continue inversible.

$$i : H \times H' \rightarrow H' \times H \quad (u, u') \mapsto (u', u) \quad (\text{A.15})$$

Le graphe de A étant fermé, il en est de même pour celui de A^{-1} .

Définition A.9 Soient $A : D(A) : H \rightarrow H'$ et $B : D(B) : H \rightarrow H'$ deux opérateurs linéaires non bornés. L'opérateur $A + B$, de domaine de définition $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$, est défini par :

$$(A + B)u = Au + Bu \quad \forall u \in D(A + B). \quad (\text{A.16})$$

Proposition A.10 Si $A : D(A) : H \longrightarrow H'$ est fermé et $B : H \longrightarrow H'$ est borné alors $A + B$ est fermé.

Preuve. On remarque tout d'abord que $D(A + B) = D(A)$. Soit $u_n \in D(A)$ qui vérifie

$$\exists u \in H, u' \in H' \quad u_n \xrightarrow{H} u \quad \text{et} \quad (A + B)u_n \xrightarrow{H'} u'. \quad (\text{A.17})$$

Comme B est continue, on a

$$Bu_n \xrightarrow{H'} Bu. \quad (\text{A.18})$$

Il suit que

$$\exists u \in H, u' \in H' \quad u_n \xrightarrow{H} u \quad \text{et} \quad Au_n \xrightarrow{H'} u' - Bu. \quad (\text{A.19})$$

Comme A est fermé, on a

$$u \in D(A) \quad \text{et} \quad Au = u' - Bu. \quad (\text{A.20})$$

C'est à dire

$$u \in D(A + B) \quad \text{et} \quad (A + B)u = u'. \quad (\text{A.21})$$

Il suit que $A + B$ est fermé.

Remarque A.11 Si A et B sont des opérateurs non bornés fermés. L'opérateur $A + B$ ne sont pas nécessairement fermés. En effet Soient $A : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ et $B : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ définis par

$$Au = \frac{du}{dx} + u \quad \text{et} \quad Bu = \frac{du}{dx} \quad (\text{A.22})$$

L'opérateur $A + B : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$

$$(A + B)u = u \quad (\text{A.23})$$

n'est pas fermé car $H^1(\mathbb{R})$ n'est pas fermé pour la norme $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

A.2 Les opérateurs maximaux monotones

Dans la dernière section, nous nous sommes intéressés aux opérateurs non bornés. Nous nous intéressons ici plus particulièrement à une classe plus petite d'opérateurs qui interviennent dans le théorème de Hille-Yoshida.

Dans cette section H désigne un espace de Hilbert.

Définition A.12 Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire non borné.

(i) L'opérateur A est monotone ssi $(Au, u)_H \geq 0$ pour tout $u \in D(A)$.

(ii) L'opérateur A est maximal ssi pour tout $f \in H$ il existe $u \in D(A)$ tel que $Au + u = f$.

Proposition A.13 Si A est maximal monotone alors son domaine est dense dans H .

Preuve. Soit $f \in H$ orthogonal à tous les éléments de $D(A)$. Montrons que f est nul. Comme A est maximal, il existe $u \in D(A)$ qui vérifie $u + Au = f$. Comme $(f, u)_H = 0$, on a $(u, u)_H + (Au, u)_H = 0$. Comme A est monotone $(Au, u)_H \geq 0$, il suit que $(u, u)_H = 0$ puis $u = 0$ et par conséquent $f = 0$.

Proposition A.14 Si A est monotone alors l'opérateur $I + \lambda A$ avec $\lambda > 0$ est injectif.

Preuve. Pour tout $u \in \ker(I + \lambda A)$, on a

$$u + \lambda Au = 0 \iff (Au + \lambda u, u)_H = 0 \iff (u, u)_H + \lambda(Au, u)_H = 0.$$

Ces deux termes étant positifs, il suit $(u, u)_H = 0$ et donc $u = 0$.

Proposition A.15 Si A est monotone, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} R(I + A) = H &\iff R(I + \lambda A) = H \text{ pour un } \lambda > 0 \\ &\iff R(I + \lambda A) = H \text{ pour tout } \lambda > 0. \end{aligned} \tag{A.24}$$

Preuve. Il suffit de montrer que si $R(I + \lambda_0 A) = H$ avec $\lambda_0 > 0$ alors $R(I + \lambda A) = H$ pour tout $\lambda \in]0, 2\lambda_0[$.

Il nous faut trouver u qui vérifie $Au + \lambda u = f$ ou de manière équivalente

$$u + \lambda_0 Au + (\lambda - \lambda_0)Au = f \iff u + \lambda_0 Au = f - (\lambda - \lambda_0)Au \tag{A.25}$$

C'est à dire

$$u + \lambda_0 Au = f - \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} (I + \lambda_0 A)u + \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} u \tag{A.26}$$

D'après la proposition A.14, l'opérateur $A + \lambda_0 I$ est bijectif. On obtient l'équation de point fixe

$$u = F(u) := \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} u + (I + \lambda_0 A)^{-1} f - \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} (I + \lambda_0 A)^{-1} u \tag{A.27}$$

qui admet une unique solution si F est contractante. Il nous suffit donc de montrer que

$$\exists \alpha < 1 \quad \left| \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \right| \|u - (I + \lambda_0 A)^{-1}u\|_{\mathbb{H}} \leq \alpha \|u\|_{\mathbb{H}}. \quad (\text{A.28})$$

Soit $f = (I + \lambda_0 A)^{-1}u$ et $g = u - f$. On a

$$f + \lambda_0 A f = u \implies (f, f)_{\mathbb{H}} + \lambda_0 (A f, f)_{\mathbb{H}} = (u, f)_{\mathbb{H}}. \quad (\text{A.29})$$

Comme A est monotone, il suit

$$(f, f)_{\mathbb{H}} \leq (u, f)_{\mathbb{H}} \quad (\text{A.30})$$

D'autre part, on a

$$\|u - f\|_{\mathbb{H}}^2 = (f - u, f - u)_{\mathbb{H}} = (u, u)_{\mathbb{H}} - 2(u, f)_{\mathbb{H}} + (f, f)_{\mathbb{H}}. \quad (\text{A.31})$$

D'après (A.30), on a

$$\|u - f\|_{\mathbb{H}}^2 \leq (u, u)_{\mathbb{H}} - (f, f)_{\mathbb{H}} \leq (u, u)_{\mathbb{H}} = \|u\|_{\mathbb{H}}. \quad (\text{A.32})$$

Il suit par inégalité triangulaire

$$\|u - (I + \lambda_0 A)^{-1}u\|_{\mathbb{H}} = \|u - f\|_{\mathbb{H}} \leq \|u\|_{\mathbb{H}} \quad (\text{A.33})$$

Comme $0 < \lambda < 2\lambda_0$, on a

$$\left| \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \right| < 1 \quad (\text{A.34})$$

L'application F est donc contractante.

Corollaire A.16 *Si A est maximal monotone alors, pour tout $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ est bijectif de $D(A)$ vers \mathbb{H} .*

Preuve. L'injectivité et la surjectivité proviennent des propositions A.14 et A.15.

Proposition A.17 *Si A est maximal monotone et $\lambda > 0$ alors $(I + \lambda A)^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ est borné et*

$$\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} \leq 1. \quad (\text{A.35})$$

Preuve. Il nous suffit de montrer l'inégalité (A.35). Pour tout $f \in \mathbb{H}$ et $u = (I + \lambda A)^{-1}f$, on a

$$\|u\|_{\mathbb{H}}^2 \leq (u, u)_{\mathbb{H}} + \lambda (A u, u)_{\mathbb{H}} = (f, u)_{\mathbb{H}} \leq \|f\|_{\mathbb{H}} \|u\|_{\mathbb{H}} \quad (\text{A.36})$$

Il suit

$$\|(I + \lambda A)^{-1}f\|_{\mathbb{H}} = \|u\|_{\mathbb{H}} \leq \|f\|_{\mathbb{H}}. \quad (\text{A.37})$$

Proposition A.18 *Si A est maximal et monotone alors A est fermé.*

Preuve. D'après la proposition A.17, $(I + A)^{-1}$ est borné. Son inverse $I + A$ est donc fermé d'après la proposition A.8. Il en est donc de même pour $A = (I + A)^{-1}$ d'après la proposition A.10.

Exemple A.19 *L'opérateur suivant est maximal monotone*

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{u} &\longmapsto -\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} \end{aligned} \tag{A.38}$$

Cet opérateur est monotone car par intégration par partie on a

$$\left(-\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2}, \mathbf{u} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx}, \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right)_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{A.39}$$

Montrons maintenant que A est maximal. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R})$ qui vérifie pour tout $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R})$

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dx}, \frac{d\mathbf{v}}{dx} \right)_{L^2(\mathbb{R})} + \left(\mathbf{u}, \mathbf{v} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = \left(f, \mathbf{v} \right)_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{A.40}$$

En prenant $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il suit que \mathbf{u} vérifie au sens des distributions

$$-\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \mathbf{u} = f. \tag{A.41}$$

Par conséquent, on a $\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} = -f + \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R})$ et donc $\mathbf{u} \in H^2(\mathbb{R})$. On conclut donc à la maximalité.

Exemple A.20 *L'opérateur suivant est maximal monotone*

$$\begin{aligned} H_D^2([0, L]) \subset L^2([0, L]) &\longrightarrow L^2([0, L]) \\ \mathbf{u} &\longmapsto -\mathbf{u}'' \end{aligned} \tag{A.42}$$

avec

$$H_D^2([0, L]) = \{ \mathbf{u} \in H^2([0, L]) : \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(L) = 0 \} \tag{A.43}$$

La monotone suit d'une intégration par partie :

$$\left(-\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2}, \mathbf{u} \right)_{L^2([0,L])} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx}, \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right)_{L^2([0,L])} \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in H_D^2([0, L]). \quad (\text{A.44})$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe $\mathbf{u} \in H_0^1(\mathbb{R})$ qui vérifie pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1([0, L])$

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dx}, \frac{d\mathbf{v}}{dx} \right)_{L^2([0,L])} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2([0,L])} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2([0,L])}. \quad (\text{A.45})$$

En prenant $\mathbf{v} \in \mathcal{D}([0, L])$, il suit que \mathbf{u} vérifie au sens des distributions

$$-\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (\text{A.46})$$

Par conséquent, on a $\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} = -\mathbf{f} + \mathbf{u} \in L^2([0, L])$ et donc $\mathbf{u} \in H_D^2([0, L])$. On conclut donc à la maximalité.

Exemple A.21 On démontre de manière analogue que l'opérateur suivant est maximal monotone

$$\begin{aligned} H_N^2([0, L]) \subset L^2([0, L]) &\longrightarrow L^2([0, L]) \\ \mathbf{u} &\longmapsto -\mathbf{u}'' \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

avec

$$H_N^2([0, L]) = \{\mathbf{u} \in H^2([0, L]) : \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}'(L) = 0\}. \quad (\text{A.48})$$

Exemple A.22 L'opérateur suivant n'est pas monotone

$$\begin{aligned} H^2([0, L]) \subset L^2([0, L]) &\longrightarrow L^2([0, L]) \\ \mathbf{u} &\longmapsto -\mathbf{u}'' \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Soit $\mathbf{u}(x) = x^2$

$$\left(-\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2}, \mathbf{u} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = -\int_0^L 2x^2 dx < 0 \quad (\text{A.50})$$

Exemple A.23 Soit

$$H_0^2([0, L]) = \{u \in H^2([0, L]) : u(0) = u(L) = 0 \text{ et } u'(0) = u'(L) = 0\} \quad (\text{A.51})$$

Montrer que l'opérateur suivant n'est pas maximal

$$\begin{aligned} H_0^2([0, L]) \subset L^2([0, L]) &\longrightarrow L^2([0, L]) \\ u &\longmapsto -u'' \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

L'opérateur $u \mapsto -\frac{d^2u}{dx^2} + u$ est bijectif de $H_D^2([0, L])$ vers $L^2([0, L])$. Comme $H_0^2([0, L])$ est strictement inclus dans $H_D^2([0, L])$, l'image de l'opérateur $u \mapsto -\frac{d^2u}{dx^2} + u$ de domaine $H_0^2([0, L])$ est strictement inclus dans $L^2([0, L])$.

A.3 Continuité, Dérivation dans les espaces de Banach et intégration dans les espace de Hilbert

A.3.1 Notion de continuité dans un espace de Banach

Soit $f : I \longrightarrow V$ une application allant d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ vers V un espace de Banach

$$I = [a, b] \text{ ou }]a, b[\text{ ou } [a, b[\text{ ou }]a, b] \text{ avec } \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \ni a < b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad (\text{A.53})$$

On dit que f est continue en $t \in I$ si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t + \varepsilon) = f(t) \text{ dans } V \quad (\text{A.54})$$

C'est à dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f(t + \varepsilon) - f(t)\|_V = 0. \quad (\text{A.55})$$

On note alors l'ensemble des fonctions continues sur I à valeur dans V

$$C^0(I, V) \quad (\text{A.56})$$

Remarque A.24 Bien entendu, un espace de Hilbert est un espace de Banach. Rappelons aussi que l'ensemble des applications linéaires entre deux espace de Hilbert est aussi un espace de Banach.

Exemple 1. Soit H un espace de Hilbert. Soit A un opérateur linéaire borné. On note $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(H)$, avec $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des applications allant de H vers H , défini par

$$B(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^n t^n}{n!} \quad (\text{A.57})$$

Il suit à l'aide de l'inégalité triangulaire que

$$\|B(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = \exp(-At) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(H)}^n |t|^n}{n!} = \exp(\|A\|_{\mathcal{L}(H)} |t|) \quad (\text{A.58})$$

où l'espace $\mathcal{L}(H)$ a été muni de la norme d'opérateur

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{v \in H} \frac{\|Av\|_H}{\|v\|_H} \quad (\text{A.59})$$

D'autre part, comme $B(t+s) = B(t)B(s)$ il suit

$$B(t+\varepsilon) - B(t) = B(t)(B(\varepsilon) - I) \quad (\text{A.60})$$

Il suit que

$$\|B(t+\varepsilon) - B(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|B(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \|B(\varepsilon) - I\|_{\mathcal{L}(H)} \quad (\text{A.61})$$

Par inégalité triangulaire, on a

$$\|B(\varepsilon) - I\|_{\mathcal{L}(H)} = \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^n \varepsilon^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(H)}^n |\varepsilon|^n}{n!} = \exp(\|A\| |\varepsilon|) - 1 \quad (\text{A.62})$$

On déduit que

$$\|B(t+\varepsilon) - B(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \left(\exp(\|A\| |\varepsilon|) - 1 \right) \exp(\|A\| |t|) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (\text{A.63})$$

L'opérateur $B(t)$ est donc de classe $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H))$.

Exemple 2. Multiplication par un opérateur borné à faire

A.3.2 Notion de dérivation dans un espace de Banach

A.3.3 Intégration dans un espace de Hilbert

Nous ne cherchons pas ici à définir une intégrale générale de fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert. Pour le cas général, on pourra se référer aux ouvrages portant sur l'intégrale de Bochner.

Une des méthodes particulièrement simple pour définir l'intégrale d'une fonction à valeur dans un espace de Hilbert est basé sur le théorème de Riesz.

Considérons une fonction $f \in C^0(I, H)$ avec $I = [a, b]$, $a < b$, un intervalle de \mathbb{R} . On définit $\varphi_f = \int_I f(t)dt$ comme l'unique élément de H qui vérifie pour tout $v \in H$

$$(\varphi_f, v)_H = \int_I (f(t), v)_H dt \quad (\text{A.64})$$

Lemme A.25 *L'application $v \mapsto \int_I (f(t), v)_H$ est une forme linéaire continue*

preuve.

A.4 L'alternative de Fredholm

Soit H un espace de Hilbert et $K : H \rightarrow H$ un opérateur compact. Soit $S : H \rightarrow H$ l'opérateur linéaire $u \mapsto u + Ku$.

L'objet de cette section est de démontrer le théorème suivant

Théorème A.26 *L'opérateur S est injectif si et seulement si il est surjectif.*

Nous allons ici seulement démontrer que l'injectivité implique la surjectivité, car cela sera le seul résultat utilisé par la suite. La réciproque nécessite un petit développement sur les opérateurs adjoints.

Proposition A.27 *Si $S = I + K$ est injectif alors S est un opérateur à image fermé*

Démonstration :

Soit u_n une suite de H tel que $v_n = Su_n$ converge vers v dans H .

$$v_n = u_n + Ku_n \quad (\text{A.65})$$

Montrons que u_n est borné. On raisonne par l'absurde. Supposons que l'on peut extraire de u_n une sous-suite u_{σ_n} qui vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{\sigma_n}\| = +\infty. \quad (\text{A.66})$$

Considérons la suite $\tilde{u}_n = u_{\sigma_n} / \|u_{\sigma_n}\|$ qui vérifie

$$\|\tilde{u}_n\| = 1 \text{ et } \tilde{u}_n + K\tilde{u}_n = \frac{v_n}{\|u_{\sigma_n}\|}. \quad (\text{A.67})$$

On peut extraire de \tilde{u}_n une sous-suite \tilde{u}_{σ_n} qui converge faiblement vers \tilde{u} et tel que $\tilde{u}_{\sigma_n} + K\tilde{u}_{\sigma_n}$ converge fortement vers 0. Comme K est compact $K\tilde{u}_{\sigma_n}$ converge fortement vers $K\tilde{u}$. Ainsi, $\tilde{u}_{\sigma_n} = \tilde{u}_{\sigma_n} + K\tilde{u}_{\sigma_n} - K\tilde{u}_{\sigma_n}$ converge fortement vers $-K\tilde{u}$. Par unicité de la limite faible, on a $\tilde{u} + K\tilde{u} = 0$. Il suit que $\tilde{u} = 0$. Impossible car \tilde{u}_{σ_n} est de norme 1 et ne peut pas converger fortement vers 0. Ceci est impossible.

Montrons que u_n converge vers $u \in H$ et concluons. Comme u_n est borné. On peut extraire une sous suite u_{σ_n} faiblement convergente vers $u \in H$. Comme K est compact, Ku_{σ_n} converge fortement vers Ku . ainsi $u_n = u_n + Ku_n - Ku_n$ converge fortement et donc faiblement vers $v - Ku$. Par unicité de la limite faible, il suit que $u = v - Ku$. C'est à dire $v = u + Ku$ et par conséquent que v est dans l'image de S . ■

Dans la suite nous notons R_n l'image de S^n , c'est à dire le sous espace vectoriel de H

$$R_n = \left\{ f = S^n u \text{ with } u \in H \right\} \quad (\text{A.68})$$

Proposition A.28 *Si $S = I + K$ est injectif alors*

- soit S est surjectif
- soit la suite de sous-ensemble R_n est strictement décroissante ($R_{n+1} \subset R_n$ and $R_{n+1} \neq R_n$)

Démonstration :

Pour tout $f \in R_{n+1}$, il existe $x \in H$ tel que $f = S^{n+1}x = S^n y$ avec $y = Sx$. Il suit que $f \in R_n$. Ainsi, $R_{n+1} \subset R_n$.

Pour conclure, il nous suffit de montrer que si S n'est pas surjectif alors $R_{n+1} \neq R_n$. Nous raisonnons par l'absurde et supposons que $R_{n+1} = R_n$. Comme S n'est pas surjectif, on a $R_1 \neq H$. Par conséquent, il existe $x \in H \setminus R_1$. Le vecteur $y = S^n x$ est dans R_n . Comme $R_n = R_{n+1}$, c'est aussi un élément de R_{n+1} . C'est à dire $y = S^{n+1}z$ avec $z \in H$ et par conséquent

$$S^n x = S^{n+1}z \text{ c'est à dire } S^n(x - Sz) = 0. \quad (\text{A.69})$$

Comme S est injectif, S^n l'est aussi. Ainsi, on a $x = Sz$ et par conséquent $x \in R_1$. Ceci est impossible. ■

Proposition A.29 *Si $S = I + K$ est injectif alors S est surjectif.*

Démonstration :

On raisonne par l'absurde : nous supposons que S n'est pas surjectif. D'après la

proposition A.28, la suite R_n est strictement décroissante. Comme $S^n = I + K_n$ avec K_n un opérateur compact donné par

$$K_n = \sum_{p=1}^n C_p^n K^p \quad \text{avec } C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \quad (\text{A.70})$$

D'après la proposition A.27, $R_n = \mathcal{R}(S^n)$ est fermé.

Il existe donc une suite $z_n \in R_n \cap (R_{n+1})^\perp$ tel que $\|z_n\| = 1$. On a d'après le théorème de Pythagore

$$\|w - z_n\|^2 = \|w\|^2 + \|z_n\|^2 \geq 1 \quad \text{pour tout } w \in R_{n+1}. \quad (\text{A.71})$$

Comme la suite z_n est bornée, il existe une extraction strictement croissante σ tel que z_{σ_n} converge faiblement vers z dans H . Comme K est compact, la suite Kz_{σ_n} converge fortement vers Kz dans H .

$$Kz_{\sigma_n} - Kz_{\sigma_{n+1}} = (I + K)z_{\sigma_n} - (I + K)z_{\sigma_{n+1}} + z_{\sigma_{n+1}} - z_{\sigma_n} \quad (\text{A.72})$$

Comme $(I + K)z_{\sigma_n} \in R_{\sigma_{n+1}}$, $(I + K)z_{\sigma_{n+1}} \in R_{\sigma_{n+1}+1} \subset R_{\sigma_{n+1}}$ et $z_{\sigma_{n+1}} \in R_{\sigma_{n+1}}$, il suit que $(I + K)z_{\sigma_n} - (I + K)z_{\sigma_{n+1}} + z_{\sigma_{n+1}} \in R_{\sigma_{n+1}}$. D'après (A.71), on a

$$\|Kz_{\sigma_{n+1}} - Kz_{\sigma_n}\| \geq 1. \quad (\text{A.73})$$

Ceci est impossible car la suite Kz_{σ_n} est de Cauchy. ■