

UNIVERSITÉ DE PAU ET PAYS DE L'ADOUR

COURS DE MASTER 2

# Analyse mathématique des phénomènes de propagation d'ondes

HÉLÈNE BARUCQ ; JULIEN DIAZ ; SÉBASTIEN TORDEUX

Projet Magique 3D, INRIA Bordeaux Sud-Ouest

LMA, UMR CNRS 5142, Université de Pau et Pays de l'Adour

2015/2016

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le théorème de Hille-Yosida</b>	<b>5</b>
1.1	Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard . . . . .	5
1.1.1	Cas général . . . . .	5
1.1.2	Cas d'un opérateur linéaire positif . . . . .	7
1.2	Enoncé du théorème de Hille-Yosida . . . . .	8
1.3	Unicité de la solution . . . . .	9
1.4	Régularisée de Yosida . . . . .	9
1.5	Définition et propriété de la régularisée $u_\lambda$ de $u$ . . . . .	12
1.6	Démonstration du théorème de Hille-Yosida dans le cas où $u_0 \in D(A^2)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$ . . . . .	14
1.6.1	Passage à la limite sur $u_\lambda$ pour $\lambda \rightarrow 0^+$ . . . . .	14
1.7	Démonstration du théorème de Hille-Yosida dans le cas général où $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, H)$ . . . . .	18
1.8	Notion de semi-groupe . . . . .	21
1.9	Exercices du chapitre 1 . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Condition aux limites transparentes</b>	<b>27</b>
2.1	Les Conditions aux limites absorbantes en dimension un . . . . .	27
2.2	Les couches absorbantes parfaitement adaptées en dimension un . . . . .	31
2.2.1	Propagation d'onde en milieu absorbant . . . . .	31
2.2.2	Relation de dispersion et ondes planes pour l'équation des ondes et dans la PML. . . . .	33
2.2.3	Construction de couche parfaitement adaptées . . . . .	34
2.2.4	Troncature du domaine . . . . .	34
2.2.5	Etude de réflexion-transmission : PML non bornée . . . . .	35
2.2.6	Etude de réflexion-transmission : PML bornée . . . . .	37
2.2.7	Coefficient d'absorption parabolique . . . . .	38
2.3	Les couches absorbantes parfaitement adaptées en dimension $n \geq 2$ . . . . .	39
2.3.1	Les couches absorbantes de Béranger . . . . .	40
2.3.2	Relation de dispersion dans le domaine de propagation et dans la PML . . . . .	41

2.3.3	Etude de réflexion-transmission par ondes planes : PML non bornée . . . . .	43
2.3.4	Etude de réflexion-transmission : PML bornée . . . . .	44
2.3.5	Les PML dans toutes les directions d'espace . . . . .	46
2.3.6	PML à profil parabolique . . . . .	47
2.4	Les Conditions aux limites absorbantes en dimension $n \geq 2$ . . . . .	48
2.4.1	Présentation de quelques conditions aux limites absorbantes sur une surface plane . . . . .	48
2.4.2	Caractère bien posé des CLA d'ordre 1 . . . . .	50
2.4.3	Calcul du coefficient de réflexion . . . . .	52
2.4.4	Conditions aux limites sur une surface sphérique . . . . .	53
2.5	Analyse des conditions de Bayliss et Turkel en dimension 3 . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Réflexion en elastodynamique</b>	<b>59</b>
3.1	Eclairage par une onde $P$ d'une surface fixe . . . . .	59
3.2	Eclairage d'une surface fixe par une onde $S$ . . . . .	62
3.2.1	Polarisation suivant $e_3$ . . . . .	64
<b>4</b>	<b>L'équation de Helmholtz dans l'espace libre</b>	<b>68</b>
4.1	Introduction . . . . .	68
4.2	La condition de radiation de Sommerfeld . . . . .	71
4.2.1	Fonction de Green et existence de solution sortante . . . . .	71
4.2.2	Unicité de la solution sortante de l'équation d'Helmholtz . . . . .	78
4.3	Le principe d'amplitude limite . . . . .	81
4.4	Le principe d'absorption limite . . . . .	85
4.5	Développement en champ lointain . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Equation de Helmholtz en milieu hétérogène et anisotrope</b>	<b>90</b>
5.1	Milieu anisotrope . . . . .	90
5.2	Equation de Helmholtz en milieu hétérogène . . . . .	92
5.3	Equation de Helmholtz à l'extérieur d'un obstacle borné . . . . .	96
5.4	Le théorème de prolongement unique . . . . .	100
5.4.1	Inégalité de Carleman locale . . . . .	100
5.4.2	Le théorème de prolongement unique . . . . .	101
5.5	Ondes sortantes, ondes entrantes . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Discrétisation par différences finies</b>	<b>104</b>
6.1	Rappel sur les différences finies . . . . .	104
6.2	Schéma semi-discrétisé en espace . . . . .	106
6.3	Existence et unicité de la solution $u_h$ . . . . .	106
6.3.1	Stabilité et estimation de la solution . . . . .	108

6.3.2	Convergence du schéma semi-discrétisé . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Discrétisation par éléments finis</b>	<b>114</b>
7.1	Formulation variationnelle approchée (méthode de Galerkin) . .	116
7.1.1	Existence et unicité de la solution . . . . .	117
7.1.2	Stabilité et estimation de la solution . . . . .	118
7.1.3	Convergence du schéma semi-discrétisé . . . . .	120
<b>A</b>	<b>Quelques résultats d'analyse fonctionnelle</b>	<b>126</b>
A.1	Les opérateurs linéaires non bornés . . . . .	126
A.2	Les opérateurs maximaux monotones . . . . .	129
A.3	Continuité, Dérivation dans les espaces de Banach et intégration dans les espace de Hilbert . . . . .	134
A.3.1	Notion de continuité dans un espace de Banach . . . . .	134
A.3.2	Notion de dérivation dans un espace de Banach . . . . .	135
A.3.3	Intégration dans un espace de Hilbert . . . . .	135
A.4	L'alternative de Fredholm . . . . .	136
<b>B</b>	<b>Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis</b>	<b>139</b>
B.1	Approximation de Galerkin . . . . .	139
B.2	Les élément finis de Lagrange (rappel) . . . . .	141
B.2.1	Le maillage . . . . .	141
B.2.2	Construction de l'espace $V_h$ . . . . .	147
B.2.3	Calcul de la matrice $M$ . . . . .	151
B.2.4	Calcul de la matrice $K$ . . . . .	153
B.2.5	Calcul de la matrice $B$ . . . . .	155

# Chapitre 1

## Le théorème de Hille-Yosida

Nous donnons ici les outils d'analyse fonctionnelle pour démontrer que l'équation des ondes scalaires est bien posée. Nous avons ici adapté les preuves du chapitre VII et X du livre *Analyse fonctionnelle : théorie et applications* de Hain Brézis au cas d'un terme source  $f(t)$ .

### 1.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard

Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard est certainement le résultat le plus connu portant sur les problèmes en domaine temporel. Nous en rappelons rapidement une version linéaire ainsi que sa démonstration

#### 1.1.1 Cas général

**Théorème 1.1** *Soit  $H$  un espace de Hilbert,  $u_0 \in H$ ,  $f \in C^0([0, +\infty[, H)$  et une application  $A : H \rightarrow H$  uniformément Lipschitz. Le problème suivant admet une unique solution*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in C^1([0, +\infty[, H) \text{ tel que} \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \quad \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

**Remarque 1.2** *Rappelons qu'une application linéaire est uniformément Lipschitz ssi*

$$\|Au - Av\|_H \leq L\|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H. \quad (1.2)$$

**Démonstration.** Soit  $\phi : C^0([0, +\infty[, H) \longrightarrow C^0([0, +\infty[, H)$  l'application définie par

$$\phi v(t) = u_0 + \int_0^t Av(s)ds + \int_0^t f(s)ds. \quad (1.3)$$

Remarquons que  $u$  est solution de (1.1) ssi  $u$  est point fixe de  $\phi$ .

(i) Pour démontrer l'**existence** d'une solution de (1.1), nous allons démontrer, pour tout  $T \geq 0$ , l'existence et l'unicité d'un point fixe de  $\phi$  dans l'espace de Banach

$$X_k^T = \{v \in C^0([0, T], H) : \|v\|_{X_k^T} < +\infty\} \quad (1.4)$$

avec

$$\|v\|_{X_k^T} = \sup_{t \in [0, T]} \|e^{-kt}v(t)\|_H. \quad (1.5)$$

Comme  $T$  est borné, l'application  $\phi$  est bien défini en tant qu'application de  $X_k^T$  vers  $X_k^T$ . Montrons que  $\phi$  est contractante sur  $X_k^T$  pour  $k > L$

$$\begin{aligned} \|e^{-kt}(\phi u(t) - \phi v(t))\|_H &= \|e^{-kt} \int_0^t Au(s) - Av(s)ds\|_H \\ &\leq Le^{-kt} \int_0^t e^{ks}e^{-ks} \|u(s) - v(s)\|_H ds \\ &\leq Le^{-kt} \left( \int_0^t e^{ks} ds \right) \|u - v\|_{X_k^T} \\ &\leq \frac{L}{k} \|u - v\|_{X_k^T} \end{aligned} \quad (1.6)$$

On peut passer au sup sur  $t$ . Il suit

$$\|\phi u - \phi v\|_{X_k^T} \leq \frac{L}{k} \|u - v\|_{X_k^T}. \quad (1.7)$$

Comme  $k > L$ , l'application  $\phi$  est bien contractante sur  $X_k^T$ . On utilise alors le théorème de point fixe de Picard

$$\exists! u_T \in X_k^T : \phi u_T(t) = u_T(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.8)$$

Remarquons que pour  $T' > T > 0$ ,  $u_{T'}|_{[0, T]} \in X_k^T$  et  $\phi u_{T'}(t) = u_{T'}(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Par unicité, on a l'identité suivante

$$\forall T' > T > 0 \quad u_{T'}(t) = u_T(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.9)$$

Il suit que

$$\forall T \geq t \quad u_T(t) = u_t(t). \quad (1.10)$$

Ceci nous permet de définir la fonction  $u \in C^0([0, +\infty[, H)$  définie par

$$u : [0, +\infty[ \longrightarrow H \quad t \longmapsto u(t) = u_t(t). \quad (1.11)$$

(ii) Pour montrer l'unicité, considérons deux solutions  $u$  et  $v$  de (1.1). On a comme  $u$  et  $v$  sont des points fixes de  $\phi$

$$u(t) - v(t) = \int_0^t Au(s) - Av(s) ds \quad (1.12)$$

Il suit

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_H ds \quad (1.13)$$

En notant  $\psi(t) = \exp(-Lt) \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_H ds$ , on a l'équation

$$\psi'(t) \leq 0, \psi(0) = 0 \text{ et } \psi(t) \geq 0 \implies \psi(t) = 0. \quad (1.14)$$

On peut conclure à l'unicité  $u = v$ .

### 1.1.2 Cas d'un opérateur linéaire positif

**Théorème 1.3** Soit  $A : H \longrightarrow H$  un opérateur linéaire continu monotone. L'unique fonction  $u \in C^1([0, +\infty[, H)$  telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) & \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

vérifie

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H + \int_0^t \|f(\tau)\|_H d\tau \quad (1.16)$$

**Preuve.** La fonction  $u$  à valeurs dans  $H$  est donnée par la formule de la variation de la constante

$$u(t) = B(t) u_0 + \int_0^t B(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (1.17)$$

avec  $B \in C^\infty([-\infty, +\infty[, \mathcal{L}(H))$

$$B(0) = B(t) = \exp(-At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^n t^n}{n!} \quad (1.18)$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \|B(t)u_0\|_{\mathbf{H}} + \int_0^t \|B(t-\tau)f(\tau)\|_{\mathbf{H}} d\tau \quad (1.19)$$

La conclusion suit du lemme suivant qui affirme que  $B(t)$  est contractant pour tout  $t \geq 0$ .

**Lemme 1.4** *Soit  $A : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  un opérateur linéaire continu monotone et  $B(t) = \exp(-At)$ . Pour tout  $t \geq 0$ , l'opérateur  $B(t) : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  est contractant*

$$\|B(t)u\|_{\mathbf{H}} \leq \|u\|_{\mathbf{H}} \quad \forall u \in \mathbf{H}. \quad (1.20)$$

**Preuve.** L'application  $t \mapsto B(t)$  est définie à l'aide d'une série entière dont le rayon de convergence est infini. Elle est de classe  $C^\infty([0, +\infty[, \mathcal{L}(\mathbf{H}))$  et vérifie

$$B(0) = I \quad \text{et} \quad \frac{dB(t)}{dt} + A B(t) = 0 \quad (1.21)$$

Pour tout  $v \in \mathbf{H}$  indépendant du temps, on a

$$\left( \frac{dB}{dt}(t)v, B(t)v \right)_{\mathbf{H}} + \left( AB(t)v, B(t)v \right)_{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.22)$$

Comme l'opérateur  $A$  est monotone. Il suit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|B(t)v\|_{\mathbf{H}}^2 \leq 0 \quad (1.23)$$

On déduit que l'opérateur  $B(t)$  est contractant pour tout  $t \geq 0$

$$\|B(t)v\|_{\mathbf{H}} \leq \|B(0)v\|_{\mathbf{H}} \leq \|v\|_{\mathbf{H}} \quad (1.24)$$

## 1.2 Enoncé du théorème de Hille-Yosida

Dans le cadre des problèmes aux limites le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard n'est d'aucun secours. La condition (1.2) est beaucoup trop contraignante pour pouvoir s'appliquer.

Le théorème de Hille-Yosida en propose une adaptation permettant de démontrer l'existence de solution à l'équation de la chaleur ou de l'équation des ondes.

**Théorème 1.5 (Hille-Yosida)** *Soient  $\mathbf{H}$  un espace de Hilbert,  $f \in C^1([0, +\infty[, \mathbf{H})$  et  $A : D(A) \subset \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  un opérateur non borné maximal monotone,  $u_0 \in D(A)$ . Le problème suivant admet une unique solution*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in C^1([0, +\infty[, \mathbf{H}) \cap C^0([0, +\infty[, D(A)) \text{ tel que} \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (1.25)$$



D'autre part, on a les inégalités d'énergie

**Proposition 1.6** *Pour tout  $t \geq 0$ , la solution de (1.25) vérifie*

$$\begin{cases} \|u(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \|u_0\|_{\mathbf{H}} + \int_0^t \|f(s)\|_{\mathbf{H}} ds, \\ \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{\mathbf{H}} \leq \|Au_0\|_{\mathbf{H}} + \|f(0)\|_{\mathbf{H}} + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_{\mathbf{H}} ds, \\ \|Au(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \|Au_0\|_{\mathbf{H}} + \|f(0)\|_{\mathbf{H}} + \|f(t)\|_{\mathbf{H}} + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_{\mathbf{H}} ds. \end{cases} \quad (1.26)$$

### 1.3 Unicité de la solution

Soit  $u \in C^1([0, +\infty[, \mathbf{H}) \cap C^0([0, +\infty[, D(\mathbf{A}))$  vérifiant

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(0) = 0. \quad (1.27)$$

Pour montrer l'unicité de la solution de (1.25), il nous suffit de montrer que  $u = 0$ . Nous avons

$$\left( \frac{du}{dt}(t), u(t) \right)_{\mathbf{H}} + (Au(t), u(t))_{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.28)$$

Comme  $A$  est monotone on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u(t), u(t))_{\mathbf{H}} \leq 0 \quad (1.29)$$

On peut alors intégrer entre 0 et  $t$ , il suit

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \|u(0)\|_{\mathbf{H}}^2 = 0. \quad (1.30)$$

On a donc  $u = 0$ .

### 1.4 Régularisée de Yosida

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution de (1.25), on approche ici l'opérateur non borné  $A$  maximal et monotone par un opérateur borné  $A_\lambda$  monotone, avec  $\lambda > 0$  un paramètre destiné à tendre vers 0.

On commence par définir l'opérateur  $J_\lambda : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  qui approche l'opérateur identité

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}. \quad (1.31)$$

D'après la remarque A.16, cet opérateur est bien défini. Son image et son noyau sont donnés par

$$R(J_\lambda) = D(\mathbf{A}), \quad N(J_\lambda) = \{0\} \quad (1.32)$$

**Lemme 1.7** Les opérateurs  $J_\lambda \in \mathcal{L}(H)$  et  $I - J_\lambda \in \mathcal{L}(H)$  sont contractants

$$\forall u \in H \quad \|J_\lambda u\|_H \leq \|u\|_H \quad \text{et} \quad \|u - J_\lambda u\|_H \leq \|u\|_H \quad (1.33)$$

$$\forall u \in D(A) \quad \|u - J_\lambda u\|_H \leq \lambda \|Au\|_H \quad (1.34)$$

et  $J_\lambda$  converge fortement vers  $I$

$$\forall u \in H \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda u = u \text{ dans } H. \quad (1.35)$$

**Preuve.** Soit  $u \in H$  et  $v = J_\lambda u \in D(A)$

$$v + \lambda Av = u \quad (1.36)$$

Il suit comme  $A$  est monotone et  $\lambda > 0$

$$(v, v)_H + \lambda(Av, v)_H = (u, v)_H \implies (v, v)_H \leq (u, v)_H \quad (1.37)$$

On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\|v\|_H \leq \|u\|_H \text{ c'est à dire } \|J_\lambda u\|_H \leq \|u\|_H \quad (1.38)$$

D'autre part, on a

$$\|u - v\|_H^2 = \|u\|_H^2 - 2(u, v)_H + \|v\|_H^2 \quad (1.39)$$

En tenant compte de (1.37), on a

$$\|u - v\|_H^2 = \|u\|_H^2 - \|v\|_H^2 \leq \|u\|_H^2 \quad (1.40)$$

C'est à dire

$$\|u - J_\lambda u\|_H \leq \|u\|_H \quad (1.41)$$

Montrons (1.35) pour  $u \in D(A)$ . Soit  $v = J_\lambda u$

$$v + \lambda Av = u \implies v - u + \lambda A(v - u) = \lambda Au \quad (1.42)$$

$$\implies v - u = J_\lambda(\lambda Au)$$

Comme  $J_\lambda$  est contractante on a

$$\|v - u\|_H \leq \lambda \|Au\|_H \quad \text{ie. } \|J_\lambda u - u\|_H \leq \lambda \|Au\|_H \quad (1.43)$$

On obtient donc

$$\forall u \in D(A) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda u = u \text{ dans } H. \quad (1.44)$$

Considérons maintenant  $u \in H$ . Comme  $D(A)$  est dense dans  $H$ , il existe  $u_\varepsilon \in D(A)$  tel que  $\|u_\varepsilon - u\|_H \leq \varepsilon$ . D'après l'inégalité triangulaire et comme  $J_\lambda$  est contractante on a

$$\begin{aligned}
\|J_\lambda u - u\|_H &= \|J_\lambda u - J_\lambda u_\varepsilon + J_\lambda u_\varepsilon - u_\varepsilon + u_\varepsilon - u\|_H \\
&\leq \|J_\lambda u - J_\lambda u_\varepsilon\|_H + \|J_\lambda u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_H + \|u_\varepsilon - u\|_H \\
&\leq \|J_\lambda u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_H + 2\|u_\varepsilon - u\|_H \\
&\leq \|J_\lambda u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_H + 2\varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

On passe alors à la limite-sup et il suit

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \|J_\lambda u - u\|_H \leq 2\varepsilon. \tag{1.46}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut conclure

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \|J_\lambda u - u\|_H = 0 \implies \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|J_\lambda u - u\|_H = 0. \tag{1.47}$$

On définit maintenant la régularisée  $A_\lambda : H \rightarrow H$  de  $A$

$$A_\lambda = AJ_\lambda. \tag{1.48}$$

**Corollaire 1.8** Soit  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ . Soit  $J_{\lambda,\mu} = J_\lambda - J_\mu$ . Pour tout  $u \in H$ , on a

$$\|J_{\lambda,\mu}\|_H \leq 2\|u\|_H \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} J_{\lambda,\mu} u = 0 \quad \forall u \in H. \tag{1.49}$$

$$\|J_{\lambda,\mu} u\|_H \leq (\lambda + \mu) \|Au\|_H \quad \forall u \in D(A) \tag{1.50}$$

**Preuve.** D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|J_{\lambda,\mu} u\|_H \leq \|J_\lambda u - u\|_H + \|J_\mu u - u\|_H. \tag{1.51}$$

Il suit du lemme 1.7 les identités (1.49). Il suit de l'identité  $u = J_\lambda u + \lambda AJ_\lambda u = J_\mu u + \mu AJ_\mu u$

$$J_{\lambda,\mu} u = \mu J_\mu A u - \lambda J_\lambda A u. \tag{1.52}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|J_{\lambda,\mu} u\| \leq \mu \|J_\mu A u\|_H + \lambda \|J_\lambda A u\|_H. \tag{1.53}$$

Comme  $J_\lambda$  et  $J_\mu$  sont contractants, on a

$$\|J_{\lambda,\mu} u\| \leq \mu \|A u\|_H + \lambda \|A u\|_H. \tag{1.54}$$

**Lemme 1.9** Pour tout  $u \in D(A)$  on a

$$\|A_\lambda u\|_H \leq \|Au\|_H \quad (1.55)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} AJ_\lambda u = Au \text{ dans } H. \quad (1.56)$$

**Preuve.** La démonstration est basée sur l'identité suivante

$$AJ_\lambda v = J_\lambda Av \quad \forall v \in D(A). \quad (1.57)$$

On peut alors utiliser le lemme 1.7 pour conclure.

**Lemme 1.10** On a  $A_\lambda \in \mathcal{L}(H)$  et

$$\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{1}{\lambda} \quad (1.58)$$

**Preuve.** Soit  $v \in H$ . De l'identité  $J_\lambda v + \lambda AJ_\lambda v = v$  il suit

$$(J_\lambda v, AJ_\lambda v)_H + \lambda(AJ_\lambda v, AJ_\lambda v)_H = (v, AJ_\lambda v)_H \quad (1.59)$$

Comme  $A$  est monotone et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il suit

$$\lambda \|A_\lambda v\|_H^2 \leq \|v\|_H \|A_\lambda v\|_H \implies \lambda \|A_\lambda v\|_H \leq \|v\|_H. \quad (1.60)$$

**Lemme 1.11** L'opérateur  $A_\lambda$  est monotone.

**Preuve.** Soit  $u \in H$ . De l'identité  $u = J_\lambda u + \lambda AJ_\lambda u$ , il suit

$$(A_\lambda u, u)_H = (AJ_\lambda u, J_\lambda u)_H + \lambda(AJ_\lambda u, AJ_\lambda u)_H \quad (1.61)$$

Comme  $A$  est monotone et  $\lambda > 0$ , on a

$$(A_\lambda u, u)_H \geq 0. \quad (1.62)$$

## 1.5 Définition et propriété de la régularisée $u_\lambda$ de $u$

Lors de la dernière section, nous avons approché l'opérateur non borné maximal et monotone  $A$  par un opérateur borné et monotone  $A_\lambda$ .

Pour  $\lambda > 0$ , nous introduisons la solution de

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda u_\lambda(t) = f(t) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{et} \quad u_\lambda(0) = u_0. \quad (1.63)$$

Nous montrons ici que  $u_\lambda$  converge pour  $\lambda$  tendant vers 0 vers une solution de (1.25).

Comme  $A_\lambda \in \mathcal{L}(H)$  et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard on introduit la fonction  $u_\lambda \in C^1([0, +\infty[, H)$  qui vérifie (1.63)

**Lemme 1.12** Pour  $t \geq 0$  la solution de (1.63) vérifie

(i) si  $u_0 \in H$  et  $f \in C^0([0, +\infty[, H)$

$$\|u_\lambda(t)\|_H \leq \|u_0(t)\|_H + \int_0^t \|f(s)\|_H ds, \quad (1.64)$$

(ii) si  $u_0 \in D(A)$  et  $f \in C^1([0, +\infty[, H)$

$$\begin{cases} \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds, \\ \|A_\lambda u_\lambda(t)\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(0)\|_H + \|f(t)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds. \end{cases} \quad (1.65)$$

(iii) si  $u_0 \in D(A)$  et  $f \in C^0([0, +\infty[, D(A))$

$$\begin{cases} \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(t)\|_H + \int_0^t \|Af(s)\|_H ds, \\ \|A_\lambda u_\lambda(t)\|_H \leq \|Au_0\|_H + \int_0^t \|Af(s)\|_H ds. \end{cases} \quad (1.66)$$

**Preuve.** (i) La fonction  $u_\lambda$  est donné à l'aide de la formule de la résolvante car l'opérateur  $A_\lambda$  est borné. On déduit de la section 2.107

$$\|u_\lambda(t)\|_H \leq \|u_0\|_H + \int_0^t \|f(t-\tau)\|_H d\tau \quad (1.67)$$

(ii) Remarquons ensuite que  $u_\lambda$  est  $C^2([0, +\infty[, H)$  et en utilisant la même technique sur  $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$  qui vérifie

$$\frac{dv_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda v_\lambda(t) = \frac{df}{dt}(t) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{et} \quad v_\lambda(0) = -A_\lambda u_0 + f(0). \quad (1.68)$$

il suit

$$\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|A_\lambda u_0\|_H + \|f(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds \quad \forall t \geq 0 \quad (1.69)$$

Comme  $u_0 \in D(A)$ , il suit d'après (1.55)

$$\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds \quad \forall t \geq 0 \quad (1.70)$$

On a obtenu la première ligne de (1.65). La deuxième ligne de (1.65) provient de l'inégalité triangulaire et de (1.63).

(iii) Remarquons ensuite que  $A_\lambda u_\lambda$  est  $C^1([0, +\infty[, H)$  et en utilisant la même technique sur  $w_\lambda(t) = A_\lambda u_\lambda(t)$  qui vérifie

$$\frac{dw_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda w_\lambda(t) = A_\lambda f(t) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{et} \quad w_\lambda(0) = A_\lambda u_0. \quad (1.71)$$

il suit

$$\|A_\lambda u_\lambda(t)\|_H \leq \|A_\lambda u_0\|_H + \int_0^t \|A_\lambda f(s)\|_H ds \quad \forall t \geq 0 \quad (1.72)$$

Comme  $u_0 \in D(A)$  et  $f \in C^0([0, +\infty[, H)$ , il suit d'après (1.55)

$$\|A_\lambda u_\lambda(t)\|_H \leq \|A u_0\|_H + \int_0^t \|A f(s)\|_H ds \quad \forall t \geq 0 \quad (1.73)$$

On a obtenu la deuxième ligne de (1.66). La première ligne de (1.66) provient de l'inégalité triangulaire et de (1.63).

## 1.6 Démonstration du théorème de Hille-Yosida dans le cas où $u_0 \in D(A^2)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$

Dans cette section, nous montrons l'existence de la solutions de (1.25) sous les hypothèses  $u_0 \in D(A^2)$  et  $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$ .

### 1.6.1 Passage à la limite sur $u_\lambda$ pour $\lambda \rightarrow 0^+$

**Montrons que  $u_\lambda$  converge uniformément dans  $C^0([0, T], H)$  pour tout  $T > 0$  vers une fonction notée  $u(t)$ .** Soient  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ . Il suffit de montrer que  $u_\lambda$  est de Cauchy dans  $C^0([0, T], H)$ . D'après (1.63), on a

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} = -A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu. \quad (1.74)$$

Il suit

$$\left( \frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt}, u_\lambda - u_\mu \right)_H = -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu)_H \quad (1.75)$$

On utilise alors l'identité  $u = \beta A_\beta u + J_\beta u$  avec  $\beta = \lambda$  et  $\mu$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda - u_\mu\|_H^2 = - (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)_H \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)_H. \end{array} \right. \quad (1.76)$$

Comme  $A$  est monotone on a alors

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda - u_\mu\|_H^2 \leq -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)_H \\ \leq \left( \|A_\lambda u_\lambda\|_H + \|A_\mu u_\mu\|_H \right) \left( \lambda \|A_\lambda u_\lambda\|_H + \mu \|A_\mu u_\mu\|_H \right). \end{cases} \quad (1.77)$$

D'après le lemme 1.12, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|_H^2 \leq 2(\lambda + \mu)C_T \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.78)$$

avec

$$C_T = \left( \|A u_0\|_H + \|f(0)\|_H + \|f(T)\|_H + \int_0^T \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\| ds \right)^2 \quad (1.79)$$

Par intégration il suit

$$\|u_\lambda - u_\mu\|_H^2 \leq 4(\lambda + \mu)TC_T \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.80)$$

Pour  $\lambda \rightarrow 0$ ,

$$u_\lambda \text{ converge uniformément pour } t \leq T \text{ vers } u \in C^0([0, +\infty[, H). \quad (1.81)$$

**Montrons que  $\frac{du_\lambda}{dt}$  converge uniformément pour  $t \leq T$  vers  $\frac{du}{dt}$ .** Soit  $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ . La fonction  $v_\lambda$  vérifie

$$\begin{cases} \frac{dv_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda v_\lambda(t) = \frac{df}{dt}(t) \text{ pour } t \geq 0 \\ v_\lambda(0) = -A_\lambda u_0 + f(0). \end{cases} \quad (1.82)$$

On obtient donc en soustrayant l'équation pour  $v_\lambda$  et  $v_\mu$

$$\begin{cases} \frac{d(v_\lambda - v_\mu)}{dt}(t) = -A_\lambda v_\lambda(t) + A_\mu v_\mu(t) \text{ pour } t \geq 0 \\ v_\lambda(0) - v_\mu(0) = -A_\lambda u_0 + A_\mu u_0. \end{cases} \quad (1.83)$$

On prend alors le produit scalaire de la première ligne contre  $v_\lambda - v_\mu$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|_H^2 = (-A_\lambda v_\lambda + A_\mu v_\mu, v_\lambda - v_\mu)_H \text{ pour } t \geq 0 \quad (1.84)$$

On utilise alors que  $v_\beta = J_\beta v_\beta + \beta A_\beta v_\beta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|_{\mathbb{H}}^2 &= -(A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, J_\lambda v_\lambda - J_\mu v_\mu)_{\mathbb{H}} \\ &\quad - (A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, \lambda A_\lambda v_\lambda - \mu A_\mu v_\mu)_{\mathbb{H}} \quad \text{pour } t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.85)$$

Comme  $A$  est monotone et  $A_\beta = AJ_\beta$  on a

$$(A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, J_\lambda v_\lambda - J_\mu v_\mu)_{\mathbb{H}} = (A(J_\lambda v_\lambda - J_\mu v_\mu), J_\lambda v_\lambda - J_\mu v_\mu)_{\mathbb{H}} \geq 0 \quad (1.86)$$

On a donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|_{\mathbb{H}}^2 &\leq - (A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, \lambda A_\lambda v_\lambda - \mu A_\mu v_\mu)_{\mathbb{H}} \\ &\leq \left( \|A_\lambda v_\lambda\|_{\mathbb{H}} + \|A_\mu v_\mu\|_{\mathbb{H}} \right) \left( \lambda \|A_\lambda v_\lambda\|_{\mathbb{H}} + \mu \|A_\mu v_\mu\|_{\mathbb{H}} \right). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Comme  $u_0 \in D(A^2)$  et  $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$ , on peut alors appliquer le point (iii) du lemme 1.12 à  $v_\beta$  solution de (1.82)

$$\begin{cases} \|A_\lambda v_\lambda\|_{\mathbb{H}} \leq \|AA_\lambda u_0\|_{\mathbb{H}} + \|Af(0)\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \left\| \frac{dAf}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}} \\ \leq \|AAJ_\lambda u_0\|_{\mathbb{H}} + \|Af(0)\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \left\| \frac{dAf}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}} \end{cases} \quad (1.88)$$

Comme  $u_0 \in D(A^2)$ , on a d'après l'identité (1.57)

$$\|A_\lambda v_\lambda\|_{\mathbb{H}} \leq \|J_\lambda AAu_0\|_{\mathbb{H}} + \|Af(0)\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \left\| \frac{dAf}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}} \quad (1.89)$$

Comme d'après le lemme 1.7  $J_\lambda$  est contractant, il suit que pour  $t \leq T$

$$\|A_\lambda v_\lambda\|_{\mathbb{H}} \leq \|A^2 u_0\|_{\mathbb{H}} + \|Af(0)\|_{\mathbb{H}} + \int_0^T \left\| \frac{dAf}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}} ds \quad (1.90)$$

On a donc obtenu que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|_{\mathbb{H}}^2 \leq 2(\lambda + \mu) C_T^A \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.91)$$

avec

$$C_T^A = \left( \|A^2 u_0\|_{\mathbb{H}} + \|Af(0)\|_{\mathbb{H}} + \int_0^T \left\| \frac{dAf}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}} ds \right)^2 \quad (1.92)$$



On peut alors intégrer entre 0 et  $t \leq T$

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|_H^2 &\leq 4(\lambda + \mu)TC_T^A + \|v_\lambda(0) - v_\mu(0)\|_H^2 \\
&\leq 4(\lambda + \mu)TC_T^A + \|A_\lambda u_0 - A_\mu u_0\|_H^2 \\
&\leq 4(\lambda + \mu)TC_T^A + \|AJ_\lambda u_0 - AJ_\mu u_0\|_H^2
\end{aligned} \tag{1.93}$$

Comme  $J_\beta u + \beta A_\beta u = u$  on a

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|_H^2 &\leq 4(\lambda + \mu)TC_T^A + \|\lambda AA_\lambda u_0 - \mu AA_\mu u_0\|_H^2 \\
&\leq 4(\lambda + \mu)TC_T^A + (\lambda + \mu)^2 \|A^2 u_0\|_H^2
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Pour  $\lambda$  et  $\mu$  tendant vers 0

$$\frac{du_\lambda}{dt} = v_\lambda \text{ converge uniformément pour } t \leq T \text{ dans } C^0([0, T], H). \tag{1.95}$$

**Remarque 1.13** *C'est ici qu'est intervenu la condition  $u_0 \in D(A^2)$  et  $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$*

On déduit de (1.81) et (1.95) que  $u \in C^1([0, +\infty[, H)$  et

$$u_\lambda \xrightarrow{\lambda(t) \rightarrow 0} u(t) \text{ et } \frac{du_\lambda}{dt}(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \frac{du}{dt}(t) \text{ dans } H. \tag{1.96}$$

**Montrons maintenant que  $A_\lambda u_\lambda(t)$  converge vers  $Au(t)$ .**

Comme  $A_\lambda u_\lambda(t) = f(t) - \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ ,  $A_\lambda u_\lambda$  converge d'après (1.96) dans  $H$ . Il suit de l'identité  $A_\lambda = AJ_\lambda$  que

$$A(J_\lambda u_\lambda(t)) \text{ converge dans } H. \tag{1.97}$$

Montrons que  $J_\lambda u_\lambda(t)$  converge vers  $u(t)$  dans  $H$ . Comme  $J_\lambda$  est une contraction on a

$$\|J_\lambda u_\lambda - u\|_H \leq \|J_\lambda u_\lambda - J_\lambda u\|_H + \|J_\lambda u - u\|_H \leq \|u_\lambda - u\|_H + \|J_\lambda u - u\|_H \tag{1.98}$$

D'après (1.96) et le lemme 1.7, on a

$$J_\lambda u_\lambda \text{ converge vers } u \text{ dans } H. \tag{1.99}$$

D'après (1.97), (1.99) et comme  $A$  est fermé

$$u(t) \in D(A) \text{ et } A_\lambda u_\lambda(t) \text{ converge vers } Au(t) \text{ dans } H \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (1.100)$$

**On peut alors passer à la limite sur (1.63).** D'après (1.96) et (1.100), il existe  $u \in C^1([0, +\infty[, H)$  qui vérifie

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } u(0) = u_0. \quad (1.101)$$

On a obtenu le théorème de Hille-Yosida.

Par passage à la limite sur (1.64) et (1.65) il suit (1.26) dans le cas où  $u_0 \in D(A^2)$  et  $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$ .

## 1.7 Démonstration du théorème de Hille-Yosida dans le cas général où $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^1([0, +\infty[, H)$ .

Rappelons que le théorème 1.5 et la proposition 1.6 ont été démontrés pour  $u_0 \in D(A^2)$  et  $f \in C^1([0, +\infty[, D(A))$ . l'idée ici est d'approcher  $u_0 \in D(A)$  et  $f \in C^1([0, +\infty[, H)$  par

$$J_\lambda u_0 \in D(A^2) \quad \text{et} \quad J_\lambda f \in C^1([0, +\infty[, D(A)). \quad (1.102)$$

Il existe une fonction  $w_\lambda \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C^0([0, +\infty[, D(A))$  qui vérifie

$$\begin{cases} \frac{dw_\lambda}{dt}(t) + Aw_\lambda(t) = J_\lambda f(t) \in C^1([0, +\infty[, D(A)) \\ w_\lambda(0) = J_\lambda u_0 \in D(A^2). \end{cases} \quad (1.103)$$

Pour tout  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ , on a

$$\begin{cases} \frac{d(w_\lambda - w_\mu)}{dt}(t) + A(w_\lambda - w_\mu)(t) = J_{\lambda, \mu} f(t) \quad \text{pour } t \geq 0 \\ w_\lambda(0) - w_\mu(0) = J_{\lambda, \mu} u_0. \end{cases} \quad (1.104)$$

avec

$$J_{\lambda, \mu} = J_\lambda - J_\mu. \quad (1.105)$$

**Montrons que  $w_\lambda$  converge uniformément en temps vers une fonction  $u \in C^0([0, +\infty[, H)$ .** D'après la proposition 1.6, on a les estimations suivantes

$$\|w_\lambda(t) - w_\mu(t)\|_H \leq \|J_{\lambda, \mu} u_0\|_H + \int_0^T \|J_{\lambda, \mu} f(s)\|_H ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.106)$$

Le lemme 1.8 nous permet d'écrire

$$\|J_{\lambda,\mu}u_0\|_{\mathbb{H}} \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \|J_{\lambda,\mu}f(s)\|_{\mathbb{H}} \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0} 0 \quad \forall s \in [0, T] \quad (1.107)$$

D'autre part, l'opérateur  $J_\lambda$  étant contractant, on a

$$\|J_{\lambda,\mu}f(s)\|_{\mathbb{H}} \leq 2 \|f(s)\|_{\mathbb{H}} \quad (1.108)$$

En appliquant le théorème de Lebesgues, il suit

$$\int_0^T \|J_{\lambda,\mu}f(s)\|_{\mathbb{H}} ds \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0} 0. \quad (1.109)$$

Grâce à (1.106), (1.107) et (1.109), on obtient que, pour tout  $T > 0$ ,  $w_\lambda \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{H})$  converge uniformément sur tout intervalle  $[0, T]$  vers  $u \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{H})$

$$w_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} u(t) \text{ dans } \mathbb{H}. \quad (1.110)$$

(ii) D'après la proposition (1.26), on a les estimations suivantes

$$\left\| \frac{dw_\lambda}{dt}(t) - \frac{dw_\mu}{dt}(t) \right\|_{\mathbb{H}} \leq \varphi_{\lambda,\mu}(T) \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.111)$$

avec

$$\varphi_{\lambda,\mu}(T) = \|AJ_{\lambda,\mu}u_0\|_{\mathbb{H}} + \|J_{\lambda,\mu}f(0)\|_{\mathbb{H}} + \int_0^T \left\| J_{\lambda,\mu} \frac{df}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}} ds \quad (1.112)$$

Comme  $u_0 \in D(A)$  et  $f(0) \in \mathbb{H}$ , et  $\frac{df}{dt}(s) \in \mathbb{H}$  pour tout  $s \in [0, T]$  fixé, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \|AJ_{\lambda,\mu}u_0\|_{\mathbb{H}} = \|J_{\lambda,\mu}Au_0\|_{\mathbb{H}} \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0, \\ \|J_{\lambda,\mu}f(0)\|_{\mathbb{H}} \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0, \\ \left\| J_{\lambda,\mu} \frac{df}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}} \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0. \end{array} \right. \quad (1.113)$$

Comme  $\left\| J_{\lambda,\mu} \frac{df}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}} \leq 2 \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}}$  on a d'après le théorème de Lebesgues

$$\int_0^T \left\| J_{\lambda,\mu} \frac{df}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}} ds \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0. \quad (1.114)$$

On a donc obtenu

$$\varphi_{\lambda,\mu}(T) \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0. \quad (1.115)$$

On a donc obtenu la convergence uniforme dans  $H$  sur tout intervalle  $[0, T]$  de  $\frac{dw_\lambda}{dt}(t)$ . D'après le point (i), il suit que  $u \in C^1([0, +\infty[, H)$  et pour tout  $t \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} u(t) \quad \text{dans } H \\ \frac{dw_\lambda}{dt}(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{du}{dt}(t) \quad \text{dans } H \end{array} \right. \quad (1.116)$$

(iii) D'après la proposition (1.26), on a les estimations suivantes

$$\|Aw_\lambda(t) - Aw_\mu(t)\|_H \leq \varphi_{\lambda,\mu}(T) + \|J_{\lambda,\mu}f(t)\|_H \quad (1.117)$$

Comme  $f(t) \in H$  à  $t$  fixé, on a

$$\|J_{\lambda,\mu}f(t)\|_H \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0. \quad (1.118)$$

Il suit

$$\|Aw_\lambda(t) - Aw_\mu(t)\|_H \xrightarrow{\lambda,\mu \rightarrow 0^+} 0. \quad (1.119)$$

la convergence simple dans  $H$  de  $Aw_\lambda(t)$  vers un élément  $z(t) \in H$  pour tout  $t \geq 0$ .

Comme  $A$  est fermé, on a donc obtenu que

$$u(t) \in D(A) \text{ et } Aw_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} Au(t) \text{ dans } H. \quad (1.120)$$

Par passage à la limite sur (1.103) il suit que  $u \in C^1([0, +\infty[, H)$  vérifie (1.25).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_\lambda}{dt}(t) + Aw_\lambda(t) = J_\lambda f(t) \\ w_\lambda(0) = J_\lambda u_0. \end{array} \right. \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (1.121)$$

car comme  $u_0 \in H$  et tout  $t \geq 0$   $f(t) \in H$  on a d'après la proposition 1.7

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J_\lambda u_0 = u_0 \text{ et} \quad (1.122)$$

Enfin d'après (1.6),  $w_\lambda$  vérifie les inégalités

$$\left\{ \begin{array}{l} \|w_\lambda(t)\|_H \leq \|J_\lambda u_0\|_H + \int_0^t \|J_\lambda f(s)\|_H ds, \\ \left\| \frac{dw_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|AJ_\lambda u_0\|_H + \|J_\lambda f(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{dJ_\lambda f}{dt}(s) \right\|_H ds, \\ \|Aw_\lambda(t)\|_H \leq \|AJ_\lambda u_0\|_H + \|J_\lambda f(0)\|_H + \|J_\lambda f(t)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{dJ_\lambda f}{dt}(s) \right\|_H ds \end{array} \right. \quad (1.123)$$

Comme  $AJ_\lambda u_0 = J_\lambda Au_0$  et  $\frac{dJ_\lambda f}{dt}(s) = J_\lambda \frac{df}{dt}(s)$ , le lemme 1.7 nous permet d'écrire

$$\begin{cases} \|w_\lambda(t)\|_H \leq \|u_0\|_H + \int_0^t \|f(s)\|_H ds, \\ \left\| \frac{dw_\lambda}{dt}(t) \right\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(0)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds, \\ \|Aw_\lambda(t)\|_H \leq \|Au_0\|_H + \|f(0)\|_H + \|f(t)\|_H + \int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_H ds \end{cases} \quad (1.124)$$

Par passage à la limite, on obtient (1.26). ceci termine la preuve

## 1.8 Notion de semi-groupe

Pour  $f = 0$ , on a associé à tout  $u_0 \in D(A)$  une solution  $u \in C^0([0, +\infty[; H)$  qui vérifie d'après (??)

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.125)$$

Par densité de  $D(A)$  et comme toute limite uniforme d'une fonction continue est continue, on peut aussi associer à tout  $u_0 \in H$  une solution  $u \in C^0([0, +\infty[; H)$  qui vérifie (1.125). L'opérateur qui associe à  $u_0$  la fonction  $u$  à valeurs dans  $H$  est noté  $S$

$$S : H \mapsto C^0([0, +\infty[; H) \quad (1.126)$$

D'autre part, l'opérateur linéaire continue qui à  $u_0 \in H$  associe  $u(t)$  pour  $t \geq 0$  est notée  $S_t$

$$S_t : H \longrightarrow H \quad (1.127)$$

On déduit les propriétés de ces opérateurs par densité.

**Proposition 1.14 (Propriété élémentaire du semi-groupe de résolution  $S$ )** (i) Pour tout  $t \geq 0$ , on a

$$S_{t+s} = S_t S_s \text{ dans } \mathcal{L}(H) \quad (1.128)$$

$$S_0 = I \quad (1.129)$$

$$\|S_t\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad (1.130)$$

(ii) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $S$  est de classe  $C^0([0, +\infty[; \mathcal{L}(D(A^n)))$ .

(iii) La fonction  $t \mapsto S_t$  est de classe  $C^1([0, +\infty[; \mathcal{L}(D(A); H))$ . Plus précisément, on a

$$\exists S'_t \in \mathcal{L}(D(A); H) \text{ tel que } \forall u_0 \in H \quad \left\| S'_t u_0 - \frac{S_{t+\varepsilon} - S_t}{\varepsilon} u_0 \right\|_H \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \quad (1.131)$$

et

$$\forall u_0 \in H \quad \|S'_t u_0\|_H \leq \|A u_0\|_H \quad (1.132)$$

(iv) Pour tout  $n$  et  $p \geq 0$ . La fonction  $t \mapsto S_t$  est de classe  $C^p([0, +\infty[; \mathcal{L}(D(A^{n+p}); D(A^n)))$ .

(v) Dans  $\mathcal{L}(D(A); H)$ , on a les identités suivantes

$$S'_t + S_t A = 0 \quad \text{et} \quad S_t A = A S_t. \quad (1.133)$$

**Preuve.** à terminer

**Remarque 1.15** En général, la fonction  $t \mapsto S_t$  n'est pas de classe  $C^1([0, +\infty[; \mathcal{L}(H))$ .

**Proposition 1.16 (Formule de la résolvante)** La solution du problème (??) peut s'écrire sous la forme

$$u(t) = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-s} f(s) ds. \quad (1.134)$$

**Remarque 1.17** Cette formule nous permet de définir des solutions faibles de notre problème pour  $u_0 \in H$  et  $f \in C^0([0, +\infty[; H)$

**Preuve.** à terminer

Nous nous restreignons maintenant au cas où  $A$  est autoadjoint et nous nous intéressons à notion de solution hyperfaible. Celle-ci est définie par dualité.

**à terminer**

## 1.9 Exercices du chapitre 1

**Exercice.** Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur non borné tel que  $A + \lambda I$  est maximal monotone,  $u_0 \in D(A)$  et  $f \in C^1([0, +\infty[, H)$ . Montrer que le problème suivant admet une unique solution

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C^0([0, +\infty[, D(A)) \text{ tel que} \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (1.135)$$

**Exercice.** Soit  $u_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  montrer que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in C^1([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R})) \cap C^0([0, +\infty[, H^2(\mathbb{R})) \text{ tel que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (1.136)$$

**Exercice.** Soit  $u_0 \in \mathcal{D}(]0, L[)$  montrer que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in C^1([0, +\infty[, L^2([0, L])) \cap C^0([0, +\infty[, H^2([0, L])) \text{ tel que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.137)$$

**Exercice.** Soient  $u_0 \in \mathcal{D}(]0, L[)$  et  $f \in \mathcal{D}([0, +\infty[_t \times \mathbb{R}_x)$ . Montrer

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists! u \in C^1([0, +\infty[, L^2([0, L])) \cap C^0([0, +\infty[, H^2([0, L])) \text{ tel que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + u(x, t) = f(x, t) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.138)$$

**Problème** Soient  $u_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  et  $u_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Montrer que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists! u \in C^0([0, +\infty[, H^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0, +\infty[, H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C^2([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^2)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2 \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right. \quad (1.139)$$

1. Mettre ce problème sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} U \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C^0([0, +\infty[, D(A)) : \\ \frac{dU}{dt} + AU = 0 \quad \text{pour } t \geq 0, \\ U(0) = U_0. \end{array} \right. \quad (1.140)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} U(t) = (u(t), v(t) = \frac{du}{dt}(t))^T, \\ H = H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2), \\ D(A) = H^2(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2) \\ A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ -\Delta u \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1.141)$$

2. Montrer que  $A+I$  est monotone et maximal en tant qu'opérateur non borné de  $H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$

3. Montrer (1.139).

**Problème.** Soit  $u_0 \in D(A^2)$  et  $f(t) = 0$ . On cherche à montrer que la solution  $u$  de (1.25) vérifie

$$u \in C^0([0, +\infty[, D(A^2)) \cap C^1([0, +\infty[, D(A)) \cap C^2([0, +\infty[, H). \quad (1.142)$$

1. Montrer que l'application  $u \mapsto Au$  définit un opérateur maximal monotone  $A : D(A^2) \subset D(A) \rightarrow D(A)$ .

2. En déduire

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists! v \in C^0([0, +\infty[, D(A^2)) \cap C^1([0, +\infty[, D(A)) \\ \frac{dv}{dt}(t) + Av(t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \\ v(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (1.143)$$

puis que  $v = u$ .



3. Montrer que  $u \in C^2([0, +\infty[, H)$ .

**Problème.** Dans de nombreuses applications, il est trop restrictif de considérer  $u_0 \in D(A)$ . Le but de ce problème est de considérer une condition initiale moins régulière dans le cas où  $A$  est auto-adjoint (ce ne sera jamais le cas pour les équations d'ondes). Soit  $A$  est un opérateur maximal, monotone, autoadjoint et  $u_0 \in H$ . On cherche à montrer le résultat suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists! u \in C^0([0, +\infty[, H) \cap C^1([0, +\infty[, H) \cap C^1([0, +\infty[, D(A)) : \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \text{ pour } t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \quad (1.144)$$

et les estimations pour tout  $t > 0$

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H, \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H = \|Au(t)\|_H \leq \frac{1}{t} \|u_0\|_H \quad (1.145)$$

1. Soit  $w_0 \in D(A^2)$ . Montrer qu'il existe un unique

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C^0([0, +\infty[, D(A)) : \\ \frac{dw}{dt}(t) + Aw(t) = 0 \text{ pour } t > 0, \\ w(0) = w_0 \end{array} \right. \quad (1.146)$$

2. Montrer l'identité suivante

$$\frac{1}{2} \|w(T)\|_H^2 + \int_0^T (Aw, w)_H dt = \frac{1}{2} \|w_0\|_H^2 \quad (1.147)$$

3. Montrer l'identité suivante

$$\int_0^T t \left\| \frac{dw}{dt}(t) \right\|_H^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T t \frac{d}{dt} (Aw(t), w(t))_H dt = 0 \quad (1.148)$$

4. en déduire

$$\int_0^T t \left\| \frac{dw}{dt}(t) \right\|_H^2 dt + \frac{T}{2} (Aw(T), w(T))_H = \frac{1}{2} \int_0^T (Aw(t), w(t))_H dt \quad (1.149)$$

5. puis

$$\frac{1}{2}\|w(T)\|_H^2 + \int_0^T t \left\| \frac{dw}{dt}(t) \right\|_H^2 dt + \frac{T}{2}(Aw(T), w(T))_H = \frac{1}{2}\|w_0\|_H^2 \quad (1.150)$$

6. Montrer que  $t \mapsto \left\| \frac{dw}{dt}(t) \right\|_H$  est décroissante.

7. En déduire l'inégalité

$$\|w(t)\|_H \leq \|w_0\|_H, \quad \left\| \frac{dw}{dt}(t) \right\|_H = \|Aw(t)\|_H \leq \frac{1}{t}\|w_0\|_H \quad (1.151)$$

8. Soit  $w_\lambda$  la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\lambda \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C^0([0, +\infty[, D(A)) : \\ \frac{dw_\lambda}{dt}(t) + Aw_\lambda(t) = 0 \text{ pour } t > 0, \\ w_\lambda(0) = (J_\lambda)^2 u_0 \end{array} \right. \quad (1.152)$$

Soient  $T_1$  et  $T_2 > 0$ . Montrer que  $(J_\lambda)^2 u_0 \in D(A^2)$  puis montrer à l'aide de 7 que dans H

- $w_\lambda$  converge uniformément sur  $[0, T_2]$ .
- $\frac{dw_\lambda}{dt}$  converge uniformément sur  $[T_1, T_2]$ .
- $Aw_\lambda(t)$  converge uniformément sur  $[T_1, T_2]$ .

9. Montrer l'existence de  $u$  vérifiant (1.144).

10. Montrer l'unicité de  $u$ .

**Problème.** Soit  $f \in C^0([0, +\infty[, D(A))$ . Montrer

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists! u \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C^0([0, +\infty[, D(A)) \text{ tel que} \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad u(0) = 0. \end{array} \right. \quad (1.153)$$

Etablir les estimations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u(t)\|_H \leq \int_0^t \|f(s)\|_H ds, \\ \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H \leq \|f(t)\|_H + \int_0^t \|Af(s)\|_H ds, \\ \|Au(t)\|_H \leq \int_0^t \|Af(s)\|_H ds. \end{array} \right. \quad (1.154)$$

# Chapitre 2

## Condition aux limites transparentes

Par nature, le calcul numérique ne peut s'effectuer que sur des domaines bornés en espace (un ordinateur ne peut gérer qu'un nombre fini d'inconnues). Lorsque le domaine physique est non borné (c'est en général le cas pour les problèmes de propagation d'ondes), il faut alors trouver des méthodes pour pouvoir effectuer des calculs sur un sous-domaine borné.

Nous présentons dans ce chapitre deux techniques alternatives permettant de répondre à cette problématique : les conditions aux limites absorbantes ou CLA, les couches absorbantes parfaitement adaptées ou PML (perfectly matched layer). Nous présentons ces deux méthodes en dimension 1 d'espace puis en dimension supérieur.

### 2.1 Les Conditions aux limites absorbantes en dimension un

Nous considérons une équation d'ondes non-homogène

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t) \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

dont les termes sources  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_0 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $u_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$  et dont le support sont inclus dans le borné  $D = ]-L, L[$  avec  $L > 0$

$$f(x, t) = 0, \quad u_0(x) = 0 \text{ et } u_1(x) = 0 \text{ pour } x \notin D \text{ et } t \geq 0. \quad (2.2)$$

Hors du support de  $f$ , la solution de l'équation des ondes admet une forme propa-  
gative

$$\begin{cases} u(x, t) = u_+(x - t) \text{ pour } x > L, \\ u(x, t) = u_-(x + t) \text{ pour } x < -L \end{cases} \quad (2.3)$$

Les fonctions  $u_+$  et  $u_-$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$  qui vérifient

$$u_+(s) = 0 \text{ pour } s \geq L \quad \text{et} \quad u_-(s) = 0 \text{ pour } s \leq -L. \quad (2.4)$$

Nous allons fermer le domaine de calcul en modélisant le comportement de la solution pour  $x > L$  et  $x < -L$  à l'aide de conditions aux limites en espace posées en  $x = L$  et  $x = -L$ .

En observant la forme de la solution exacte, voir (2.3), on remarque qu'en  $x = L$  et  $x = -L$  on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(-L, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

On est alors amené à résoudre le problème équivalent

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t) \text{ pour } x \in ] -L, L[ \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \text{ pour } x \in ] -L, L[ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(-L, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = 0 \text{ pour } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

La restriction de la solution du problème (2.1) à  $x \in [-L, L]$  vérifie (2.6). Pour montrer que l'on peut calculer cette restriction en résolvant (2.6) il nous suffit de montrer que ce problème admet une unique solution.

Pour montrer que (2.6) admet une unique solution, nous allons appliquer le théorème de Hille-Yosida.

Nous commençons par effectuer une réduction d'ordre. Soient  $v = \partial_t u$  et

$$U = (u, v)^T.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(x, t) - v(x, t) = 0 \\ \partial_t v(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t) \text{ pour } x \in ] -L, L[ \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = u_1(x) \text{ pour } x \in ] -L, L[ \\ v(L, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad v(-L, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = 0 \text{ pour } t \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Nous avons

$$\frac{dU}{dt} + AU = F \quad (2.8)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} = H^1(I) \times L^2(I), \quad (I = [-L, L]) \\ D(A) = \left\{ (u, v) \in H^2(I) \times H^1(I) : v(L) = -d_x u(L) \text{ et } v(-L) = d_x u(-L) \right\}, \\ A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ -u'' \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Nous allons montrer que  $A + I$  est maximal monotone

$$(AU, U)_H = -(v, u)_{H^1(I)} - (u'', v)_{L^2(I)} \quad (2.10)$$

Par intégration par partie, il suit

$$(AU, U)_H = -(v', u')_{L^2(I)} - (v, u)_{L^2(I)} + (u', v')_{L^2(I)} - d_x u(L)v(L) + d_x u(-L)v(-L). \quad (2.11)$$

En utilisant que  $v(L) = -d_x u(L)$  et  $v(-L) = d_x u(-L)$  on a

$$(AU, U)_H = -(v, u)_{L^2(I)} + \left( v(L) \right)^2 + \left( v(-L) \right)^2 \geq -(v, u)_{L^2(I)}. \quad (2.12)$$

Comme  $-(v, u)_{L^2(I)} \leq (u, u)_{H^1(I)} + (v, v)_{L^2(I)}$ . On obtient donc

$$((A + I)U, U)_H \geq 0 \quad (A + I \text{ est monotone}) \quad (2.13)$$

Montrons maintenant que  $A + I$  est maximal. Il faut montrer que le problème suivant admet une solution

$$U \in D(A) : AU + 2U = F \quad (2.14)$$

avec  $F = (f, g) \in H = H^1(I) \times L^2(I)$ . Cette équation s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^2(I) \text{ et } v \in H^1(I) \\ -v + 2u = f \in H^1(I) \\ -u'' + 2v = g \in L^2(I) \\ v(L) = -u'(L) \\ v(-L) = u'(-L) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

On peut facilement découpler ce système en éliminant  $v = 2u - f$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^2(I) \\ -u'' + 4u = 2f + g \in L^2(I), \\ u'(L) + 2u(L) = f(L), \\ u'(-L) - 2u(-L) = -f(-L). \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Ce problème admet la formulation variationnelle suivante

$$u \in H^1(I) : a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in H^1(I) \quad (2.17)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u, w) = \int_{-L}^L u'(x)w'(x) + 4u(x)w(x)dx + 2u(L)w(L) + 2u(-L)w(-L) \\ l(w) = \int_{-L}^L (2f(x) + g(x))w(x)dx + f(L)w(L) + f(-L)w(-L) \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure à l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.17).

On peut alors se poser la question de la reconstruction de la solution sur tout  $\mathbb{R}$  à partir de sa restriction. Elle est basée sur (2.3). Hors de  $x \in [-L, L]$ ,  $u(x, t)$  est donné si  $|x| - L > ct$  par  $u(x, t) = 0$  et sinon par

$$\begin{cases} u(x, t) = u(L, t - \frac{x-L}{c}) \text{ pour } x > L, \\ u(x, t) = u(-L, t + \frac{x+L}{c}) \text{ pour } x < -L. \end{cases} \quad (2.19)$$

Sa simplicité et son efficacité (cette condition est exacte) rend cette condition aux limites incontournable en dimension 1. Le développement de nouvelles conditions transparentes approchées ne peut alors se justifier d'un point de vue pratique qu'en dimension supérieure ou égale à 2. Toutefois nous allons introduire les PML en dimension 1 afin de suivre une démarche la plus constructive possible

## 2.2 Les couches absorbantes parfaitement adaptées en dimension un

Afin de légèrement simplifier la présentation nous nous limitons à  $f \equiv 0$ . Nous cherchons à poser le problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.20)$$

sur un domaine borné afin de le résoudre numériquement. L'approche adoptée ici consiste à entourer le domaine de calcul par un matériau absorbant qui modélisera le milieu extérieur.

Nous allons tout d'abord étudier la propagation d'ondes dans les milieux absorbants puis nous présenterons les formulation PML.

### 2.2.1 Propagation d'onde en milieu absorbant

Soit  $I = ]L_-, L_+[$  un intervalle avec  $L_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $L_+ \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Soit  $\sigma$  un scalaire positif. L'équation des ondes amorties est obtenue en remplaçant

l'opérateur de dérivée en temps  $\partial_t$  dans l'équation des ondes par un opérateur de dérivée plus frottement  $\partial_t + \sigma$ . Afin de raccourcir les écritures nous notons

$$(\partial_t + \sigma)^2 u = \partial_t^2 u + 2\sigma \partial_t u + \sigma^2 u \quad (2.21)$$

L'équation des ondes amorties s'écrit

$$\begin{cases} u_\sigma \in C^\infty(I \times \mathbb{R}_+) \\ (\partial_t + \sigma)^2 u_\sigma(x, t) - c^2 \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Pour être bien posé cette équation doit être fermée par des conditions initiales et des conditions aux limites en espace (on n'a pas ici unicité de la solution de ce problème). Nous considérons cette équation sans ces conditions aux limites et proposons une paramétrisation de l'ensemble de ces solutions par deux fonctions de la droite réelle ( $u_{\sigma,+}^{II}$  et  $u_{\sigma,-}^{II}$ ).

La première étape de la résolution consiste à poser le changement de variable

$$u_\sigma(x, t) = u_\sigma^I(x, t) \exp(-\sigma t) \quad (2.23)$$

La fonction  $u_\sigma^I(x, t)$  est solution d'une équation des ondes classique

$$\begin{cases} u_\sigma^I \in C^\infty(I \times \mathbb{R}_+) \\ \partial_t^2 u_\sigma^I(x, t) - c^2 \partial_x^2 u_\sigma^I(x, t) = 0 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

La fonction  $u_\sigma^I$  peut donc se décomposer en deux termes le premier se propageant dans le sens  $x$ -croissant, le second dans le sens  $x$ -décroissant

$$u_\sigma^I(x, t) = u_{\sigma,+}^I(x - ct) + u_{\sigma,-}^I(x + ct). \quad (2.25)$$

On en déduit que

$$u(x, t) = \left( u_{\sigma,+}^I(x - ct) + u_{\sigma,-}^I(x + ct) \right) \exp(-\sigma t). \quad (2.26)$$

La deuxième étape consiste à remarquer qu'une décroissance en temps est équivalente à une décroissance dans la direction de propagation. Nous effectuons alors le changement de variable  $u_{\sigma,+}^I(s) = u_{\sigma,+}^{II}(s) \exp(-\frac{\sigma s}{c})$  et  $u_{\sigma,-}^I(s) = u_{\sigma,-}^{II}(s) \exp(\frac{\sigma s}{c})$ , la fonction  $u$  peut s'écrire

$$u_\sigma(x, t) = u_{\sigma,+}^{II}(x - ct) \exp(-\frac{\sigma x}{c}) + u_{\sigma,-}^{II}(x + ct) \exp(\frac{\sigma x}{c}). \quad (2.27)$$



Nous adoptons afin de les notations suivantes

$$\begin{cases} u_{\sigma,+}(x, t) = u_{\sigma,+}^{II}(x - ct) \exp(-\frac{\sigma x}{c}), \\ u_{\sigma,-}(x, t) = u_{\sigma,-}^{II}(x + ct) \exp(\frac{\sigma x}{c}). \end{cases} \quad (2.28)$$

Remarquons que ces fonctions vérifient

$$\begin{cases} (\partial_t + \sigma + c\partial_x)u_{\sigma,+}(x, t) = 0, \\ (\partial_t + \sigma - c\partial_x)u_{\sigma,-}(x, t) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

## 2.2.2 Relation de dispersion et ondes planes pour l'équation des ondes et dans la PML.

Nous allons nous intéresser à des solutions particulières, appelées ondes planes, de l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0. \quad (2.30)$$

et de l'équation des ondes amorties

$$(\partial_t + \sigma)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 \quad (2.31)$$

qui admettent la forme

$$u(x, t) = \exp(i\omega t + kx) \text{ et } u_\sigma(x, t) = \exp(i\omega t + k_\sigma x). \quad (2.32)$$

Afin que ces ondes soient solutions de l'équation des ondes on a les relations de dispersions pour l'équation des ondes

$$(i\omega)^2 - (ik)^2 = 0 \iff k = \pm\omega \quad (2.33)$$

et l'équation des ondes amorties

$$(i\omega + \sigma)^2 - (ik_\sigma)^2 = 0 \iff k_\sigma = \pm(\omega - i\sigma). \quad (2.34)$$

Nous notons

$$k = \omega \quad \text{et} \quad k_\sigma = \frac{i\omega + \sigma}{i\omega} k. \quad (2.35)$$

A  $\omega$  fixé, pour chacun des deux modèles nous avons une onde plane se propageant dans le sens  $x$  croissant

$$u(x, t) = \exp(i\omega t - ikx) \quad \text{et} \quad u_\sigma(x, t) = \exp(i\omega t - ik_\sigma x) \quad (2.36)$$

et une onde plane se dirigeant dans le sens  $x$  décroissant

$$u(x, t) = \exp(i\omega t + ikx) \quad \text{et} \quad u_\sigma(x, t) = \exp(i\omega t + ik_\sigma x). \quad (2.37)$$

### 2.2.3 Construction de couche parfaitement adaptées

La formulation PML consiste à remplacer le milieu de propagation pour  $|x| > L$  par un milieu absorbant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \partial_t + \sigma \right)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 \text{ pour } x < -L \text{ et } t \geq 0, \\ \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \text{ pour } x \in ] -L, L[ \text{ et } t \geq 0, \\ \left( \partial_t + \sigma \right)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 \text{ pour } x > L \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \text{ pour } x \in ] -L, L[ \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Afin de fermer ce système d'équations il faut y ajouter des conditions de transmission à chacune des interfaces. Ces conditions s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma(L, t) = u(L, t) \\ \left( \partial_t + \sigma \right) \partial_x u(L, t) = \partial_t \partial_x u_\sigma(L, t). \end{array} \right. \quad (2.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma(-L, t) = u(-L, t) \\ \left( \partial_t + \sigma \right) \partial_x u_\sigma(-L, t) = \partial_t \partial_x u(-L, t). \end{array} \right. \quad (2.40)$$

La dérivation de ces conditions de transmission s'effectue en minimisant les réflexions apparaissant aux interfaces entre le milieu physique et la couche absorbante.

### 2.2.4 Troncature du domaine

La solution est atténuée de manière exponentielle à l'intérieur de la couche absorbante. Il est donc tout à fait raisonnable de fermer à distance finie cette couche absorbante par une condition de Dirichlet. Soit  $L_\sigma > L$  la distance de troncature

du domaine.

$$\left\{ \begin{array}{l} u : ]-L, L[ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } u_\sigma : (]-L_\sigma, -L[ \cup ]L, L_\sigma[) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \text{ pour } x \in ]-L, L[ \text{ et } t \geq 0, \\ (\partial_t + \sigma)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 \text{ pour } |x| > L \text{ et } t \geq 0, \end{array} \right. \quad (2.41)$$

avec les conditions de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma(L, t) = u(L, t) \\ \partial_t \partial_x u_\sigma(L, t) = (\partial_t + \sigma) \partial_x u(L, t). \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\sigma(-L, t) = u(-L, t) \\ \partial_t \partial_x u_\sigma(-L, t) = (\partial_t + \sigma) \partial_x u(-L, t). \end{array} \right. \quad (2.43)$$

les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = u_0(x) \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \text{ pour } x \in ]-L, L[, \\ u_\sigma(x, 0) = 0 \quad \partial_t u_\sigma(x, 0) = 0 \text{ pour } |x| > L. \end{array} \right. \quad (2.44)$$

et les conditions aux limites en espace

$$u_\sigma(L_\sigma, t) = 0 \quad \text{et} \quad u_\sigma(-L_\sigma, t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (2.45)$$

En tronquant le domaine en  $x = L_\sigma$ , on génère une onde réfléchiée en  $x = L_\sigma$ . Cette onde sera elle aussi amortie à travers la couche absorbante et ne reviendra qu'avec une faible amplitude en  $x = L$  où elle n'engendrera que peu de réflexion dans le milieu physique.

## 2.2.5 Etude de réflexion-transmission : PML non bornée

Une étude par onde plane permet de vérifier le caractère parfaitement adapté des couches PML. Afin de simplifier la présentation, nous allons considérer un

milieu propagatif en  $x > 0$  et une seule couche PML localisée en  $x < 0$ .

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 & \text{pour } x \geq 0, \\ \left( \partial_t + \sigma \right)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0 & \text{pour } x \leq 0, \end{cases} \quad (2.46)$$

avec les conditions de transmission

$$\begin{cases} u(0, t) = u_\sigma(0, t) \\ \left( \partial_t + \sigma \right) \partial_x u(0, t) = \partial_t \partial_x u_\sigma(0, t). \end{cases} \quad (2.47)$$

Nous éclairons le domaine en  $x = +\infty$  par une onde incidente d'amplitude 1

$$\exp(i\omega t + ikx) \quad (2.48)$$

A l'interface cette onde se transforme en une onde réfléchie du côté  $x > 0$  et une onde transmise du côté  $x < 0$

$$\begin{cases} u(x, t) = \exp(i\omega t + ikx) + R \exp(i\omega t - ikx), \\ u_\sigma(x, t) = T_\sigma \exp(i\omega t + ik_\sigma x) \end{cases} \quad (2.49)$$

avec  $k$  et  $\sigma$  qui sont définies par

$$k = \omega \quad \text{et} \quad k_\sigma = \frac{i\omega + \sigma}{i\omega} k. \quad (2.50)$$

Nous allons maintenant déterminer les amplitudes des ondes réfléchies et transmises  $R$  et  $T_\sigma$  à l'aide des conditions de transmission (2.55)

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma, \\ \left( i\omega + \sigma \right) ik - \left( i\omega + \sigma \right) ikR = i\omega \left( ik_\sigma \right) T_\sigma. \end{cases} \quad (2.51)$$

La relation (2.50) nous permet de simplifier ce système

$$T_\sigma = 1 + R \quad \text{et} \quad T_\sigma = 1 - R. \quad (2.52)$$

On obtien  $T_\sigma = 1$  et  $R = 0$ . On conclut donc que la couche PML ne génère aucune réflexion et un transmission totale. C'est pourquoi on parle de caractère parfaitement adapté.

## 2.2.6 Etude de réflexion-transmission : PML bornée

Nous avons déjà annoncée qu'en tronquant la PML à distance finie, elle générerait une réflexion de faible amplitude. C'est ce que nous allons vérifier ici. Nous considérons une fonction  $u$  qui vérifie l'équation d'ondes sur la demi-droite  $x > 0$

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad (2.53)$$

et sur l'intervalle  $x \in [-L_\sigma, 0]$ , avec  $L_\sigma > 0$ , la longueur de la PML,

$$\left(\partial_t + \sigma\right)^2 u_\sigma(x, t) - \partial_x^2 u_\sigma(x, t) = 0. \quad (2.54)$$

A l'interface, la solution vérifie les conditions de transmission

$$\begin{cases} u_\sigma(0, t) = u(0, t) \\ \partial_t \partial_x u_\sigma(0, t) = \left(\partial_t + \sigma\right) \partial_x u(0, t). \end{cases} \quad (2.55)$$

La couche absorbante est terminée par une condition de Dirichlet

$$u_\sigma(-L_\sigma, t) = 0. \quad (2.56)$$

Soit  $\omega > 0$ . Nous considérons encore le cas d'un éclairage par une onde plane incidente d'amplitude 1

$$\exp(i\omega t - ikx). \quad (2.57)$$

A l'interface cette onde génère une onde réfléchie dans le domaine  $x > 0$  et une onde transmise dans le domaine  $x < 0$  qui va elle-même générer une onde réfléchie en  $x = -L$

$$\begin{cases} u(x, t) = \exp(i\omega t + ikx) + R \exp(i\omega t - ikx) \\ u_\sigma(x, t) = T_\sigma \exp(i\omega t + ik_\sigma x) \exp(\sigma x) + R_\sigma \exp(i\omega t - ik_\sigma x). \end{cases} \quad (2.58)$$

avec

$$k = \omega \quad \text{et} \quad k_\sigma = \frac{i\omega + \sigma}{i\omega} k. \quad (2.59)$$

Les conditions de transmission en  $x = 0$  s'écrivent

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma + R_\sigma, \\ (i\omega + \sigma)(ik)(1 - R) = (i\omega)(ik_\sigma)(T_\sigma - R_\sigma). \end{cases} \quad (2.60)$$

Ce système se simplifie à l'aide de (2.59)

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma + R_\sigma, \\ 1 - R = T_\sigma - R_\sigma. \end{cases} \quad (2.61)$$

On a donc  $T_\sigma = 1$  et  $R = R_\sigma$ . D'autre part en  $x = -L_\sigma$ , la condition aux limites s'écrit

$$T_\sigma \exp(-ik_\sigma L_\sigma) + R_\sigma \exp(ik_\sigma L_\sigma) = 0 \quad (2.62)$$

On obtient alors

$$R_\sigma = T_\sigma \exp(-2ik_\sigma L_\sigma) = \exp(-2ik_\sigma L_\sigma). \quad (2.63)$$

Il suit de (2.59)

$$R_\sigma = \exp(-2ikL_\sigma) \exp(-2\sigma L_\sigma). \quad (2.64)$$

On a donc obtenu

$$T_\sigma = 1 \text{ et } R = R_\sigma \exp(-2\sigma L) \exp(-2ikL_\sigma). \quad (2.65)$$

On vérifie donc bien qu'en fermant la PML on génère une onde réfléchie dont l'amplitude est petite dès que  $\sigma L$  est grand.

## 2.2.7 Coefficient d'absorption parabolique

Lorsque les PML sont discrétisées avec une méthode numérique (éléments finis, différences finies, ...) la discrétisation génère des réflexions au niveau du changement de milieu. C'est pourquoi en pratique, on préfère souvent un coefficient d'absorption dépendant de la variable  $x$  au coefficient d'absorption constant. Le profil parabolique, défini ci dessous, est particulièrement efficace en pratique. La fonction  $\sigma$  étant de classe  $C^1$  ne génère que peu de réflexions au niveau de la discrétisation.

$$\begin{cases} \sigma(x) = \sigma_0 \frac{(x-L)^2}{2}, & \forall x > L, \\ = 0, & \forall x \in [-L, L], \\ = \sigma_0 \frac{(x+L)^2}{2}, & \forall x < -L. \end{cases} \quad (2.66)$$

Afin de simplifier les écritures on introduit la convention

$$\sigma(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.67)$$

Le coefficient d'absorption étant nul aux deux interfaces. On aura alors les deux conditions de transmission

$$u(L, t) = u_\sigma(L, t) \quad \text{et} \quad \partial_x u(L, t) = \partial_x u_\sigma(L, t). \quad (2.68)$$

D'autre part le bon point de vue consiste à utiliser un système d'ordre 1 et non d'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + \sigma(x))u_\sigma(x, t) - \partial_x v_\sigma(x, t) = 0, \\ (\partial_t + \sigma(x))v_\sigma(x, t) - \partial_x u_\sigma(x, t) = 0, \\ u_\sigma(-L_\sigma, t) = 0 \quad \text{et} \quad u_\sigma(L_\sigma, t) = 0, \\ u_\sigma(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u_\sigma(x, 0) = u_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (2.69)$$

avec  $u_0$  et  $u_1$  à support dans  $[-L, L]$ .

## 2.3 Les couches absorbantes parfaitement adaptées en dimension $n \geq 2$

Une première idée consiste à remplacer le domaine propagatif pour  $|x| > L$  par une couche absorbante. Cette idée, bien que séduisante, est vouée à l'échec car elle provoque des réflexions à la frontière entre la couche absorbante et le domaine physique. Dans les années 90 Alain Bamberger a proposé des couches absorbantes parfaitement adaptées qui permettent de ne générer aucune réflexion parasite. C'est cette approche que nous présentons ici.

A partir de la dimension 2, il faut borner le domaine dans plusieurs directions d'espace. Nous allons tout d'abord borner le domaine dans une direction. Puis nous montrerons comment borner le domaine selon plusieurs directions simultanément.

### 2.3.1 Les couches absorbantes de Béranger

On repère le point  $x$  par ses coordonnées

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x') \quad \text{avec } x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (2.70)$$

On note  $\Delta' = \sum_{i=2}^n \partial_i^2$ . On a

$$\Delta u(x) = \partial_1^2 u(x) + \Delta' u(x). \quad (2.71)$$

On effectue la décomposition suivante de la solution

$$u = u^1 + u', \quad (2.72)$$

avec

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^1 + \partial_1^2 u^1 = 0, \\ \partial_t^2 u' + \Delta' u' = 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

ou de manière équivalente

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^1 + \partial_1^2 u^1 = -\partial_1^2 u', \\ \partial_t^2 u' + \Delta' u' = -\Delta' u^1. \end{cases} \quad (2.74)$$

La première équation peut être interprétée comme une équation d'ondes dans la direction  $x$  avec un terme source. La seconde est une équation de propagation d'ondes dans le plan orthogonal au vecteur unitaire  $e_x$  avec terme source. Plutôt que d'introduire un terme d'amortissement dans ces deux équations, Alain Bamberger a eu l'idée de ne rajouter ce terme que sur la partie en  $x$  de ce système. On aboutit au système PML

$$\begin{cases} (\partial_t + \sigma)^2 u_\sigma^1 - \partial_1^2 u_\sigma^1 = \partial_1^2 u_\sigma', \\ \partial_t^2 u_\sigma' - \Delta' u_\sigma' = \Delta' u_\sigma^1, \end{cases} \quad (2.75)$$

avec  $\sigma > 0$  le paramètre d'absorption.



### 2.3.2 Relation de dispersion dans le domaine de propagation et dans la PML

Nous supposons que la solution admet la forme suivante

$$u(x, t) = \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik' \cdot x') \quad (2.76)$$

et nous cherchons la relation qui relie  $\omega \in \mathbb{R}^+$ ,  $k_1 \in \mathbb{R}$  et  $k' \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Dans le domaine propagatif, cette onde satisfait

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_1^2 u(x, t) - \Delta' u(x, t) = 0. \quad (2.77)$$

On obtient donc

$$\left( -\omega^2 + k_1^2 + \|k'\|^2 \right) \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik' \cdot x') = 0. \quad (2.78)$$

On a donc la relation de dispersion pour le domaine propagatif

$$k_1^2 + \|k'\|^2 = \omega^2. \quad (2.79)$$

Ainsi dans le domaine propagatif et à  $k'$  et  $\omega$  fixé, la solution est décomposée en une onde se dirigeant dans le sens  $x$  croissant et une onde se dirigeant dans le sens  $x$  décroissant. Dans la suite, on notera  $k_1$  le scalaire positif vérifiant (2.79)

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp(i\omega t - ik_1 x_1 + ik' \cdot x') \quad (\text{ondes propagatives sens } x \text{ croissant}), \\ \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik' \cdot x') \quad (\text{ondes propagatives sens } x \text{ décroissant}). \end{array} \right. \quad (2.80)$$

Dans la couche absorbante, on recherche la solution sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1} x_1 + ik' \cdot x'), \\ u^1(x, t) = \alpha_1 \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1} x_1 + ik' \cdot x'), \\ u'(x, t) = \alpha' \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1} x_1 + ik' \cdot x'). \end{array} \right. \quad (2.81)$$

Afin d'obtenir la relation de dispersion, on écrit le système PML

$$\begin{cases} u(x, t) = u^1(x, t) + u'(x, t), \\ (\partial_t + \sigma)^2 u^1(x, t) - \partial_1^2 u(x, t) = 0, \\ \partial_t^2 u'(x, t) - \Delta' u(x, t) = 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} (i\omega + \sigma)^2 \alpha^1 + k_{\sigma,1}^2 &= 0, \\ (i\omega)^2 \alpha' + \|k'\|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.83)$$

On modifie la première ligne pour obtenir

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 \alpha^1 + \frac{(i\omega)^2}{(i\omega + \sigma)^2} k_{\sigma,1}^2 &= 0, \\ (i\omega)^2 \alpha' + \|k'\|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Comme  $\alpha^1 + \alpha' = 1$ , il suit la relation de dispersion dans la PML

$$(i\omega)^2 + \frac{(i\omega)^2}{(i\omega + \sigma)^2} k_{\sigma,1}^2 + \|k'\|^2 = 0. \quad (2.85)$$

A  $\omega$  et  $k'$  fixé, on a deux ondes planes amorties

$$\begin{cases} \exp(i\omega t - ik_{\sigma,1}x_1 + ik' \cdot x') & \text{(propagation dans le sens } x_1 \text{ croissant),} \\ \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1}x_1 + ik' \cdot x') & \text{(propagation dans le sens } x_1 \text{ décroissant),} \end{cases} \quad (2.86)$$

avec

$$k_{\sigma,1} = \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega}\right) k_1 \quad (2.87)$$

le complexe de partie réelle positive et de partie imaginaire négative.

### 2.3.3 Etude de réflexion-transmission par ondes planes : PML non bornée

Dans cette section nous montrons que la couche absorbante ne génère aucune réflexion lorsqu'elle est de longueur infinie. Nous considérons ici une situation simplifiée. Dans le demi-espace  $x_1 > 0$ , la fonction  $u$  vérifie une équation d'ondes

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad \text{pour } x_1 > 0. \quad (2.88)$$

Le demi-espace  $x_1 < 0$  est constitué d'une couche absorbante

$$\begin{cases} u_\sigma(x, t) = u_\sigma^1(x, t) + u'_\sigma(x, t), \\ \left(\partial_t + \sigma\right)^2 u_\sigma^1(x, t) - \partial_1^2 u_\sigma(x, t) = 0, \\ \partial_t^2 u'_\sigma(x, t) - \Delta' u_\sigma(x, t) = 0. \end{cases} \quad (2.89)$$

Ces deux domaines sont reliés par la condition de transmission

$$\begin{cases} u(0, x', t) = u_\sigma(0, x', t), \\ \left(\partial_t + \sigma\right) \partial_x u(0, x', t) = \partial_t \partial_x u_\sigma(0, x', t). \end{cases} \quad (2.90)$$

Nous éclairons le demi-espace  $x_1 > 0$  par une onde plane incidente de pulsation  $\omega$  se propageant de le sens  $x_1$  décroissant

$$\exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik' \cdot x') \quad \text{pour } x_1 > 0. \quad (2.91)$$

Au niveau de l'interface cette onde va se réfléchir et se transmettre pour donner naissance à une onde réfléchie et à une une onde transmise. La solution dans le demi-espace  $x_1 > 0$  prend la forme

$$u(x, t) = \exp(i\omega t + k_1 x_1 + k' \cdot x') + R \exp(i\omega t - k_1 x_1 + ik' \cdot x'). \quad (2.92)$$

Dans le demi-espace  $x_1 < 0$ , la solution est seulement constituée par l'onde transmise

$$u_\sigma(x, t) = T_\sigma \exp(i\omega t - k_{\sigma,1} x_1 + ik' \cdot x'). \quad (2.93)$$

Les scalaires  $k_1 > 0$  et  $k_{\sigma,1}$  vérifient

$$k_1^2 = \omega^2 - \|k'\|^2 \quad \text{et} \quad k_{\sigma,1} = \frac{i\omega + \sigma}{i\omega} k_1. \quad (2.94)$$

Nous allons déterminer les amplitudes des ondes  $R$  et  $T_\sigma$  à l'aide des conditions de transmission (2.90). Après avoir divisé par  $\exp(i\omega t)$  ces relations s'écrivent

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma, \\ (i\omega + \sigma)ik_1(1 - R) = (i\omega)ik_{\sigma,1}T_\sigma. \end{cases} \quad (2.95)$$

Il suit grâce à (2.94)

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma, \\ 1 - R = T_\sigma. \end{cases} \quad (2.96)$$

La résolution de ce système fournit  $T_\sigma = 1$  et  $R = 0$ . La couche PML infinie ne génère aucune réflexion.

### 2.3.4 Etude de réflexion-transmission : PML bornée

Nous recommençons l'étude précédente dans le cas d'une PML bornée. Nous considérons une fonction solution (2.88), (2.89) pour  $x_1 > 0$ , de (2.90) pour  $x_1 \in [-L_\sigma, 0]$  et qui vérifie d'autre part une condition de Dirichlet en  $x_1 = -L_\sigma$

$$u_\sigma(-L_\sigma, x', t) = 0 \quad (2.97)$$

Le demi-espace  $x_1 > 0$  est éclairé par une onde plane se propageant dans le sens  $x_1$  décroissant

$$\exp(i\omega t + ik_1x_1 + ik' \cdot x') \quad (2.98)$$

A l'interface avec la PML, cette onde incidente donne naissance à une onde transmise et une onde réfléchi qui va elle-même se réfléchir en  $x_1 = -L$ . Dans le demi-espace  $x_1 > 0$ , nous avons

$$u(x, t) = \exp(i\omega t + ik_1x_1 + ik' \cdot x') + R \exp(i\omega t - ik_1x_1 + ik' \cdot x'). \quad (2.99)$$

De même dans la bande  $x_1 \in [-L_\sigma, 0]$ , nous avons

$$u(x, t) = T_\sigma \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1}x_1 + ik' \cdot x') + R_{\sigma,1} \exp(i\omega t - ik_1x_1 + ik' \cdot x') \quad (2.100)$$

Les conditions de transmission (2.90) s'écrivent alors

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma + R_\sigma, \\ (i\omega + \sigma)ik_1(1 - R) = (i\omega)ik_{\sigma,1}(T_\sigma - R_\sigma). \end{cases} \quad (2.101)$$

On en déduit à l'aide de la relation de dispersion

$$\begin{cases} 1 + R = T_\sigma + R_\sigma, \\ 1 - R = T_\sigma - R_\sigma. \end{cases} \quad (2.102)$$

Il suit  $T_\sigma = 1$  et  $R = R_\sigma$ . Pour conclure nous relierons  $T_\sigma$  et  $R_\sigma$  à l'aide de la condition de Dirichlet en  $x = -L_\sigma$ .

$$T_\sigma \exp(i\omega t - ik_{\sigma,1}L_\sigma + ik' \cdot x') + R_\sigma \exp(i\omega t + ik_{\sigma,1}L_\sigma + ik' \cdot x') = 0. \quad (2.103)$$

En divisant par  $\exp(i\omega t + ik' \cdot x')$  on a

$$T_\sigma \exp(-ik_{\sigma,1}L_\sigma) + R_\sigma \exp(ik_{\sigma,1}L_\sigma) = 0. \quad (2.104)$$

En tenant compte de  $k_{\sigma,1} = k_1 \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega}\right)$ , il suit

$$T_\sigma \exp\left(-ik_1L_\sigma - \frac{k_1\sigma L_\sigma}{\omega}\right) + R_\sigma \exp\left(ik_1L_\sigma + \frac{k_1\sigma L_\sigma}{\omega}\right) = 0 \quad (2.105)$$

On a donc obtenu

$$R_\sigma = \exp\left(-2ik_1L_\sigma - \frac{2k_1\sigma L_\sigma}{\omega}\right)T_\sigma. \quad (2.106)$$

On a donc obtenu toutes les amplitudes des ondes planes

$$\begin{cases} T_\sigma = 1, \\ R = \exp\left(-2ik_1L_\sigma\right) \exp\left(-\frac{2k_1\sigma L_\sigma}{\omega}\right), \\ R_\sigma = \exp\left(-2ik_1L_\sigma\right) \exp\left(-\frac{2k_1\sigma L_\sigma}{\omega}\right). \end{cases} \quad (2.107)$$

On remarque que la réflexion sera d'autant plus faible que le produit  $\sigma L_\sigma$  est grand. D'autre part, le nombre d'ondes  $k_1 \in [0, \omega]$  est d'autant plus petit que l'onde est rasante. La formule (2.107) révèle que plus l'onde est rasante plus elle est réfléchiée par la PML.

### 2.3.5 Les PML dans toutes les directions d'espace

Nous cherchons à calculer les valeurs de la fonction  $u$  solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.108)$$

dans le domaine

$$\Omega = [-L, L]^n \quad (2.109)$$

entouré par une couche PML  $\Omega_\sigma \setminus \Omega$  avec

$$\Omega_\sigma = [-L_\sigma, L_\sigma]^n. \quad (2.110)$$

Nous allons reformuler ce problème en décomposant sa solution en  $n$  fonctions  $u^i$  vérifiant

$$\begin{cases} u(x, t) = u^1(x, t) + \dots + u^n(x, t), \\ \partial_t^2 u^i(x, t) - \partial_i^2 u(x, t) = 0, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \end{cases} \quad (2.111)$$

avec

$$x = (x_1, \dots, x_n). \quad (2.112)$$

Dans la PML nous allons ajouter un terme d'absorption à l'équation régissant  $u^i$  si  $|x_i| \geq L$ . La PML est décomposée en  $n$  zones qui se recouvrent

$$\Omega_\sigma^i = \left\{ x \in \Omega_\sigma : |x_i| > L \right\}. \quad (2.113)$$

On note  $\Omega^i$  le "complémentaire" de  $\Omega_\sigma^i$  inclus dans le domaine de calcul

$$\Omega^i = \left\{ x \in \Omega_\sigma : |x_i| < L \right\}. \quad (2.114)$$

L'interface entre  $\Omega_\sigma^i$  et  $\Omega^i$  est notée

$$\Gamma^i = \left\{ x \in \Omega_\sigma : |x_i| = L \right\} \quad (2.115)$$

Le système PML s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_\sigma(x, t) = u_\sigma^1(x, t) + \dots + u_\sigma^n(x, t), \\ \partial_t^2 u_\sigma^i(x, t) - \partial_i^2 u_\sigma(x, t) = 0, & \text{pour } x \in \Omega^i, \\ \left( \partial_t + \sigma \right)^2 u_\sigma^i(x, t) - \partial_i^2 u_\sigma(x, t) = 0, & \text{pour } x \in \Omega_\sigma^i, \\ \left( \partial_t + \sigma \right) \partial_i u_\sigma^i|_{\Omega^i}(x, t) = \partial_i \partial_i u_\sigma^i|_{\Omega_\sigma^i}(x, t), & \text{pour } x \in \Gamma_\sigma^i. \end{array} \right. \quad (2.116)$$

La PML est fermée à l'aide d'une condition aux limites par exemple de Dirichlet

$$u_\sigma(x, t) = 0, \quad \text{pour } x \in \partial\Omega_\sigma. \quad (2.117)$$

### 2.3.6 PML à profil parabolique

C'est la technique la plus souvent utilisée en pratique. Le bon point de vue est de revenir à la formulation d'ordre 1 de l'équation des ondes

$$u(x) = u^1(x) + \dots + u^n(x) \quad \text{et} \quad v(x) = \begin{bmatrix} v^1(x) \\ \dots \\ v^n(x) \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

La formulation PML s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left( \partial_t + \sigma(x_i) \right) v^i(x, t) = \partial_x u(x, t), & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \geq 0, \\ \left( \partial_t + \sigma(x_i) \right) u^i(x, t) = \partial_x v^i(x, t), & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.119)$$

avec  $\sigma$  le profil d'absorption définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(s) = \sigma_0 \frac{(s-L)^2}{L_\sigma^2}, & \forall s > L, \\ = 0, & \forall s \in [-L, L], \\ = \sigma_0 \frac{(s+L)^2}{L_\sigma^2}, & \forall s < -L. \end{array} \right. \quad (2.120)$$

La couche PML est fermée par une condition de Dirichlet

$$u_\sigma(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\sigma \quad (2.121)$$

Le profil  $\sigma$  étant régulier aux interfaces de la PML, les fonctions  $u^i$  et  $v^i$  sont continues.

## 2.4 Les Conditions aux limites absorbantes en dimension $n \geq 2$

### 2.4.1 Présentation de quelques conditions aux limites absorbantes sur une surface plane

En dimensions  $n$ , de nombreux auteurs ont dérivé des conditions aux limites absorbantes. Nous présentons ici les conditions historiques d'Engquist et Majda [] qui ont proposé les conditions aux limites absorbantes suivantes et ont démontrés qu'elles étaient associées à des problèmes bien posés.

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad (2.122)$$

La condition aux limites absorbantes d'ordre  $i$  s'écrit en  $x = -L$

$$\left( \partial_1 - \partial_x \right)^i u(-L, x', t) = 0 \quad (2.123)$$

La condition aux limites absorbantes d'ordre  $i$  s'écrit en  $x = L$

$$\left( \partial_1 + \partial_x \right)^i u(L, x', t) = 0 \quad (2.124)$$



Les conditions absorbante d'ordre 1, 2 et 3 s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1 :} \quad (\partial_t - \partial_1)u(-L, x', t) = 0, \\ \text{Ordre 2 :} \quad (\partial_t^2 - 2\partial_1\partial_t + \partial_1^2)u(-L, x', t) = 0, \\ \text{Ordre 3 :} \quad (\partial_t^3 - 3\partial_1\partial_t^2 + 3\partial_1^2\partial_t - \partial_1^3)u(-L, x', t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.125)$$

En pratique, il n'est pas facile de discrétiser des dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 en  $x_1$ . C'est pourquoi, on remplacera les dérivées  $\partial_1^p$  pour  $p > 1$  à l'aide de l'identité

$$\partial_1^2 u(x, t) = (\partial_t^2 - \Delta')u(x, t) \quad \text{avec } x \in \Omega \text{ et } t \geq 0. \quad (2.126)$$

Il suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1 :} \quad (\partial_t - \partial_1)u(-L, x_2, t) = 0, \\ \text{Ordre 2 :} \quad (2\partial_t^2 - 2\partial_1\partial_t - \Delta')u(-L, x_2, t) = 0, \\ \text{Ordre 3 :} \quad (4\partial_t^3 - 4\partial_1\partial_t^2 - 3\partial_t\Delta' + \partial_1\Delta')u(-L, x_2, t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.127)$$

De même en  $x_1 = -L$ , on peut réécrire la condition aux limites absorbantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1 :} \quad (\partial_t + \partial_1)u(L, x_2, t) = 0, \\ \text{Ordre 2 :} \quad (2\partial_t^2 + 2\partial_1\partial_t - \Delta')u(L, x_2, t) = 0, \\ \text{Ordre 3 :} \quad (4\partial_t^3 + 4\partial_1\partial_t^2 - 3\partial_t\Delta' - \partial_1\Delta')u(L, x_2, t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.128)$$

## 2.4.2 Caractère bien posé des CLA d'ordre 1

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$  et  $u_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$ . On considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Chercher } u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{pour } x \in \Omega \text{ et } t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0, & \text{pour } x \in \partial\Omega \text{ et } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{pour } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \text{pour } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.129)$$

Nous allons montrer que ce problème admet une unique solution  $u \in C^2(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+, H^1(\Delta, \Omega))$ , avec  $u \in H^1(\Delta, \Omega)$  ssi  $u \in H^1(\Omega)$  et  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ . Nous notons  $v(x, t) = \partial_t u(x, t)$ . Le vecteur  $U = (u, v)$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u(x, t) - v(x, t) = 0 & \text{et } u(x, 0) = u_0(x) \\ \partial_t v(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{et } \partial_t v(x, 0) = u_1(x). \end{array} \right. \quad (2.130)$$

C'est à dire

$$\partial_t U(x, t) + AU(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad U(0) = U_0, \quad (2.131)$$

avec

$$AU(x, t) = \begin{bmatrix} -v & 0 \\ 0 & -\Delta u(x, t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U_0(x) = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \quad (2.132)$$

Nous posons

$$\left\{ \begin{array}{l} H = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ D(A) = \left\{ (u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) : \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial_n u(x, t) + v(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \end{array} \right. \quad (2.133)$$

Il nous suffit de montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que l'opérateur  $A + \alpha I$  est maximal et monotone

(i) Trouvons  $\alpha$  tel que  $A + \alpha I$  est monotone

$$\left( AU, U \right)_H = - \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) + v(x)u(x)dx - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx. \quad (2.134)$$

La formule de Green

$$\int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x)dx + \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\partial\Omega} \partial_n u(x)v(x)dx \quad (2.135)$$

nous permet d'écrire

$$\left( AU, U \right)_H = - \int_{\partial\Omega} v(x)\partial_n u(x)dx - \int_{\Omega} v(x)u(x)dx. \quad (2.136)$$

d'où d'après la condition à la limite

$$\left( AU, U \right)_H = \int_{\partial\Omega} v^2(x)dx - \int_{\Omega} v(x)u(x)dx. \quad (2.137)$$

On a donc

$$\left( AU, U \right)_H \geq - \int_{\Omega} v(x)u(x)dx. \quad (2.138)$$

Comme  $2ab \leq a^2 + b^2$ , on obtient

$$\left( AU, U \right)_H \geq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x)dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2(x)dx \geq -\|u\|_H^2. \quad (2.139)$$

Ainsi l'opérateur  $A + I$  est monotone

$$\left( AU + U, U \right)_H \geq 0. \quad (2.140)$$

(ii) Montrons que  $A + I$  est maximal. Il nous faut démontrer que le problème suivant admet une solution  $u \in H^1(\Delta, \Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$  pour tout  $f \in H^1(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} -v(x) + 2u(x) = f(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ -\Delta u + 2v(x) = g(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + v(x) = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.141)$$

Nous éliminons  $v(x) = 2u(x) - f(x)$

$$\begin{cases} -\Delta u + 4u(x) = 2f(x) + g(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + 2u(x) = f(x) & \text{pour } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.142)$$

L'existence de la fonction  $u$  suit du théorème de Lax-Milgram appliqué à la formulation variationnelle : chercher  $u \in H^1(\Omega)$  tel que pour tout  $w \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx + 4 \int_{\Omega} u(x)w(x) dx = \int_{\Omega} (2f(x) + g(x))w(x) dx. \quad (2.143)$$

L'opérateur  $A + I$  est donc maximal.

### 2.4.3 Calcul du coefficient de réflexion

Comme pour les PML nous effectuons ici une étude par onde plane. Le demi-espace  $x_1 > 0$  est le siège d'un phénomène de propagation d'ondes

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad (2.144)$$

ou de manière équivalente

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_1^2 u(x, t) - \Delta' u(x, t) = 0. \quad (2.145)$$

Ce demi-espace est fermé en  $x = 0$  par les conditions aux limites absorbantes d'Engquist et Majda d'ordre  $i$

$$\left( \partial_t - \partial_x \right)^i u(0, x', t) = 0. \quad (2.146)$$

Nous éclairons le domaine par une onde plane se propageant dans le sens  $x$ -décroissant provenant de  $x_1 = +\infty$

$$u(x_1, x', t) = \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik' \cdot x') + R \exp(i\omega t - ik_1 x_1 + ik' \cdot x') \quad (2.147)$$

La condition de transmission d'Engquist-Majda d'ordre  $i$  peut alors s'écrire

$$(i\omega - ik_1)^i + (i\omega + ik_1)^i R = 0. \quad (2.148)$$

Le coefficient de réflexion prend alors la forme suivante

$$R = -\frac{(\omega - k_1)^i}{(\omega + k_1)^i}. \quad (2.149)$$

En notant  $\theta \in [0, \pi/2]$  l'angle d'incidence de l'onde plane (l'angle entre le vecteur  $k$  et  $e_1$ ,  $\theta = 0$  pour une incidence normale et  $\theta = \frac{\pi}{2}$  pour une onde rasante), nous avons

$$\cos(\theta) = \frac{k_1}{\omega}. \quad (2.150)$$

Il suit

$$R = -\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}\right)^i = -\tan^{2i}\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (2.151)$$

Remarquons que le coefficient de réflexion est nul pour les ondes à incidence normales et 1 pour les ondes rasantes. D'autre part plus l'ordre de la CLA est élevé plus le coefficient de réflexion est petit.

#### 2.4.4 Conditions aux limites sur une surface sphérique

Les conditions aux limites absorbantes d'Engquist et Majda (d'ordre supérieur ou égal à 2) peuvent poser des problèmes lorsque l'on doit borner le domaine dans plusieurs directions. La présence de coin peut en effet provoquer des instabilités numériques.

Une idée naturelle consiste à poser cette condition aux limites sur une sphère de rayon  $\rho$ . C'est cette approche qu'ont développé Bayliss et Turkel [].

**Coordonnées polaires et sphériques.** En dimension 2, nous notons  $r \geq 0$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$  les coordonnées polaires

$$x_1 = r \cos(\theta) \quad \text{et} \quad x_2 = r \sin(\theta) \quad (2.152)$$

Le laplacien en coordonnée polaire s'écrit alors

$$\Delta u(x) = \left( \frac{1}{r} \partial_r r \partial + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \right) u(r, \theta). \quad (2.153)$$

En dimension 3, nous notons  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi[$  les coordonnées sphériques

$$x_1 = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad x_2 = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad \text{et} \quad x_3 = r \cos(\theta). \quad (2.154)$$

Le laplacien en dimension 3 s'écrit

$$\Delta u(x) = \left( \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) + \frac{1}{r^2} \Delta' \right) (r, \theta, \varphi) \quad (2.155)$$

avec

$$\Delta' = \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta u) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \partial_\varphi^2 u \quad (2.156)$$

**Les conditions aux limites absorbantes de Bayliss et Turkel** Elles s'écrivent pour  $x$  sur la sphère  $r = \rho$  et  $t \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 u = \left( \partial_t + \partial_r + \frac{n-1}{2\rho} \right) u(x, t), \\ L_m u = \left( \partial_t + \partial_r + \frac{2p}{\rho} + \frac{n-1}{2\rho} \right) L_{m-1} u(x, t), \end{array} \right. \quad (2.157)$$

avec  $m$  l'ordre de la condition aux limites et  $n$  la dimension de l'espace  $\mathbb{R}^n$  sur lequel est posé l'équation des ondes Les deux premières s'écrivent en dimension 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 0 : } \left( \partial_t + \partial_r + \frac{1}{2r} \right) u(x, t) = 0, \\ \text{Ordre 1 : } \left( \partial_t + \partial_r + \frac{5}{2r} \right) \left( \partial_t + \partial_r + \frac{1}{2r} \right) u(x, t) = 0, \end{array} \right. \quad (2.158)$$

et en dimension 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 0 : } \left( \partial_t + \partial_r + \frac{1}{r} \right) u(x, t) = 0, \\ \text{Ordre 1 : } \left( \partial_t + \partial_r + \frac{3}{r} \right) \left( \partial_t + \partial_r + \frac{1}{r} \right) u(x, t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.159)$$

## 2.5 Analyse des conditions de Bayliss et Turkel en dimension 3

Nous considérons une solution  $u$  de l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x) \exp(i\omega t) \quad (2.160)$$

**Résolution de l'équation des ondes harmoniques sur une couronne par séparation de variable** Nous allons appliquer ici une technique de séparation de variable. Au niveau mathématique, cette technique peut être justifiée à l'aide de la théorie des opérateur autoadjoints. Nous adoptons le point de vue des praticiens qui permet de mieux faire ressortir les concepts sans s'attarder sur des points purement techniques.

Nous considérons une fonction  $u(x, t) = w(x) \exp(i\omega t)$  qui vérifie l'équation des ondes dans une couronne de la forme

$$\rho_{min} \leq r \leq \rho. \quad (2.161)$$

La fonction  $w$  vérifie

$$\omega^2 w(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \partial_r w(r, \theta, \varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \Delta' w(r, \theta, \varphi) = 0. \quad (2.162)$$

Nous recherchons  $w$  sous la forme

$$w(r, \theta, \varphi) = f(r) Y(\theta, \varphi). \quad (2.163)$$

Il suit

$$\frac{\omega^2 r^2 f(r, \theta, \varphi) + \partial_r \left( r^2 \partial_r f(r) \right)}{f(r)} = - \frac{\Delta' Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)}. \quad (2.164)$$

Le membre de gauche ne dépend pas de  $\theta$  et  $\varphi$  tandis que le membre de droite ne dépend pas de  $r$ . C'est pourquoi, ils sont tous les deux constants.

$$\frac{\omega^2 r^2 f(r, \theta, \varphi) + \partial_r \left( r^2 \partial_r f(r) \right)}{f(r)} = \lambda \quad (2.165)$$

et

$$- \frac{\Delta' Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = \lambda. \quad (2.166)$$

Le couple  $\lambda, Y$  est un mode propre du laplacien transverse  $-\Delta'$ . Il est alors bien connu que les valeurs propres sont de la forme

$$\lambda_\ell = \ell(\ell + 1) \quad \text{avec } \ell \in \mathbb{N}. \quad (2.167)$$

et que l'espace propre associé est de dimension  $2\ell + 1$ . On utilisera pour représenter les fonctions propres les harmoniques sphériques qui forment une base des fonction  $L^2$  de la sphère

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad \text{avec } \ell \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \llbracket -\ell, \ell \rrbracket. \quad (2.168)$$

Les premières harmoniques sphériques sont données après normalisation

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \\ Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin(\theta) e^{-i\varphi}, \\ Y_1^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos(\theta), \\ Y_1^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin(\theta) e^{i\varphi}, \\ Y_2^{-2}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi}, \\ Y_2^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}, \\ Y_2^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_2^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, \\ Y_2^2(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}. \end{array} \right. \quad (2.169)$$

La partie radiale ne nécessite aucune fonction spéciale. Elle vérifie

$$\frac{\omega^2 r^2 f(r) + \partial_r (r^2 \partial_r f(r))}{f(r)} = \ell(\ell + 1) \quad (2.170)$$

Cette équation différentielle ordinaire étant d'ordre 2, l'espace vectorielle de ces solutions est d'ordre 2. Il est aussi bien connue que deux solutions sont données



par

$$f_{\ell,-}(r) = r^\ell \left(\frac{1}{r} d_r\right)^\ell \left(\frac{\exp(i\omega r)}{r}\right) \quad \text{et} \quad f_{\ell,+}(r) = r^\ell \left(\frac{1}{r} d_r\right)^\ell \left(\frac{\exp(-i\omega r)}{r}\right). \quad (2.171)$$

et sont proportionnelles aux fonction de Hankel demi entière. Dans la couronne  $\rho_{min} < r < \rho$ , la fonction  $u(x, t)$  est donnée par

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \alpha_{\ell,m} s_\ell(r) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) + \beta_{\ell,m} e_\ell(r) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \right). \quad (2.172)$$

avec

$$s_\ell(r, t) = r^\ell \left(\frac{1}{r} d_r\right)^\ell \left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r}\right) \quad (2.173)$$

et

$$e_\ell(r, t) = r^\ell \left(\frac{1}{r} d_r\right)^\ell \left(\frac{\exp(i\omega t + i\omega r)}{r}\right) \quad (2.174)$$

La première partie est une onde entrante car elle se propage dans le sens  $r$  décroissant. La deuxième partie est une onde sortante car elle se propage dans le sens  $r$  croissant.

Nous développons alors l'ensemble des termes radiaux. On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} e_\ell(r, t) = \sum_{p=0}^{\ell} e_{\ell,p} \frac{\exp(i\omega r - i\omega t)}{r^{1+p}}, \\ s_\ell(r, t) = \sum_{p=0}^{\ell} s_{\ell,p} \frac{\exp(i\omega r + i\omega t)}{r^{1+p}} \end{array} \right. \quad (2.175)$$

**Effet de la condition de Bayliss Turkel sur les ondes sortantes.** Nous reprenons la configuration précédente et fermons le domaine à l'aide de la condition aux limites de Bayliss-Turkel. Nous allons ici étudier l'effet de la condition aux limites absorbantes de Bayliss-Turkel sur les termes sortants de (2.172). Commençons par remarquer

$$\left(\partial_t + \partial_r\right) \left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) = -\frac{p+1}{r} \left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) \quad (2.176)$$

La condition de Bayliss-Turkel d'ordre 0 appliquée à un terme sortant s'écrit donc

$$L_0 \left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) = -p \frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+2}}. \quad (2.177)$$

De même pour l'opérateur d'ordre 1, on a

$$L_1 \left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) = (-p)(1-p) \frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+3}}. \quad (2.178)$$

Puis par récurrence, il suit

$$L_m\left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) = (-p)(1-p)\cdots(m-p)\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+2+m}}. \quad (2.179)$$

Ainsi nous remarquons que pour  $p \in \llbracket 0, m \rrbracket$ ,

$$L_m\left(\frac{\exp(i\omega t - i\omega r)}{r^{p+1}}\right) = 0. \quad (2.180)$$

On a donc

$$L_m(s_\ell) = 0 \quad \forall \ell \in \llbracket 0, m \rrbracket. \quad (2.181)$$

L'opérateur absorbant de Bayliss-Turkel d'ordre  $m$  est donc transparent pour les ondes sortantes d'ordre inférieure ou égale à  $m$ .

# Chapitre 3

## Réflexion en elastodynamique

### 3.1 Eclairage par une onde $P$ d'une surface fixe

Nous nous plaçons dans le demi-plan  $x_1 > 0$ . Ce domaine est régi les équations de l'élastodynamique linéaire isotrope et est fermé en  $x_1 = 0$  par une condition de Dirichlet

$$\mathbf{u}(0, x_2, x_3) = 0. \quad (3.1)$$

Une onde  $P$  provenant de  $x_1 = +\infty$  éclaire ce domaine

$$\mathbf{u}_{P,inc} = \mathbf{u} \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (3.2)$$

avec  $\omega > 0$  et  $k_1 > 0$ . Cette onde est longitudinale

$$\mathbf{u} = \gamma \mathbf{k} \quad (3.3)$$

et vérifie la relation de dispersion des ondes  $P$

$$\|\mathbf{k}\|^2 = \frac{\omega^2}{c_P^2}. \quad (3.4)$$

Quitte à effectuer une rotation, on peut choisir le vecteur d'ondes orthogonal dans le plan orthogonal à  $(0, 0, 1)$ . C'est à dire

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Tout en ne perdant aucune généralité, nous fixons en raison de la linéarité  $\gamma = 1$ .  
l'onde incidente prend la forme

$$u_{P,inc} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t + ik_1x_1 + ik_2x_2). \quad (3.6)$$

Cette onde incidente va donner premièrement naissance à une onde plane  $P$  réfléchie

$$\mathbf{u}_{P,ref} = R \begin{pmatrix} -k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t - ik_1x_1 + ik_2x_2) \quad (3.7)$$

avec  $R$  un coefficient de réflexion. Deuxièmement, elle se transformera en une onde  $S$

$$\mathbf{u}_{S,ref} = \begin{pmatrix} u_{S,1} \\ u_{S,2} \\ u_{S,3} \end{pmatrix} \exp(i\omega t - ik_{S,1}x_1 + ik_2x_2) \quad (3.8)$$

avec  $u_S$  un vecteur transverse  $u_{S,1}k_{S,1} + u_{S,2}k_2 = 0$  et  $k_{S,1} \in \mathbb{R}$  qui vérifie la relation de dispersion

$$(k_{S,1})^2 + (k_2)^2 = \frac{\omega^2}{c_S^2} \quad \text{ie.} \quad (k_{S,1})^2 = (k_1)^2 + \frac{\omega^2}{c_S^2} - \frac{\omega^2}{c_P^2} \quad (3.9)$$

Remarquons que  $0 < k_1 < k_{S,1}$  car  $0 < c_S < c_P$ . L'onde totale est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = & \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik_2 x_2) \\ & + R \begin{pmatrix} -k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t - ik_1 x_1 + ik_2 x_2) \\ & + \begin{pmatrix} u_{S,1} \\ u_{S,2} \\ u_{S,3} \end{pmatrix} \exp(i\omega t - ik_{S,1} x_1 + ik_2 x_2) \quad (3.10) \end{aligned}$$

La condition aux limites  $u(0, x_2, x_3) = 0$  va nous permettre d'obtenir  $R$  et  $\mathbf{u}_S$ . Elle s'écrit

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{S,1} \\ u_{S,2} \\ u_{S,3} \end{pmatrix} \exp(i\omega t + ik_2 x_2) = 0 \quad (3.11)$$

C'est à dire

$$\begin{cases} k_1 - R_P k_1 + u_{S,1} = 0 \\ k_2 + R_P k_2 + u_{S,2} = 0 \\ u_{S,3} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Comme l'onde  $S$  est transversale on a  $(u_{S,1}, u_{S,2}, 0) \cdot (-k_{S,1}, k_2, 0) = 0$ . Par conséquent on obtient

$$u_S = R_S \begin{pmatrix} k_2 \\ k_{S,1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

avec  $R_S \in \mathbb{R}$  un coefficient de réflexion. Le système (3.12) s'écrit alors

$$\begin{cases} k_1 - R_P k_1 + R_S k_2 = 0, \\ k_2 + R_P k_2 + R_S k_1 = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

c'est à dire

$$\begin{cases} 1 - R_P + R_S \frac{k_2}{k_1} = 0 \\ 1 + R_P + R_S \frac{k_{S,1}}{k_2} = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

La résolution de ce système fournit

$$\begin{cases} R_P = 1 - \frac{2k_2^2}{k_1 k_{S,1} + k_2^2}, \\ R_S = -\frac{2k_2 k_1}{k_{S,1} k_1 + k_2^2}. \end{cases} \quad (3.16)$$

## 3.2 Eclairage d'une surface fixe par une onde $S$

Nous nous plaçons dans le demi-plan  $x_1 > 0$ . Ce domaine est régi les équations de l'élastodynamique linéaire isotrope et est fermé en  $x_1 = 0$  par une condition de Dirichlet

$$\mathbf{u}(0, x_2, x_3) = 0. \quad (3.17)$$

Une onde  $S$  est transversale provenant de  $x_1 = +\infty$  éclaire ce domaine

$$\mathbf{u}_{P,inc} = \mathbf{u} \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik_2 x_2). \quad (3.18)$$

avec  $\omega > 0$  et  $k_1 > 0$ . Cette onde est longitudinale

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (3.19)$$

et vérifie la relation de dispersion des ondes  $P$

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_P^2}. \quad (3.20)$$

L'onde incidente peut être vue comme une combinaison linéaire de deux ondes transversales

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik_2 x_2). \quad (3.21)$$

et

$$\begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t + ik_1 x_1 + ik_2 x_2). \quad (3.22)$$

En traitant successivement ces deux polarisations, on aura traité l'ensemble des cas possibles.

### 3.2.1 Polarisation suivant $\mathbf{e}_3$

Nous traitons ici le cas d'une onde incidente de la forme (3.21). Cette onde peut donner naissance à une onde  $P$  réfléchie et une onde  $S$  réfléchie.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\omega t + ik_{S,1}x_1 + ik_2x_2) + R_P \begin{pmatrix} -k_{P,1} \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t - ik_{P,1}x_1 + ik_2x_2) + \left[ R_S \begin{pmatrix} k_2 \\ k_{S,1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{S,3} \end{pmatrix} \right] \exp(i\omega t - ik_{S,1}x_1 + ik_2x_2). \quad (3.23)$$

, il est facile de voir que l'onde  $S$  se réfléchit sans aucune conversion

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\omega t + ik_1x_1 + ik_2x_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(i\omega t - ik_1x_1 + ik_2x_2). \quad (3.24)$$



On peut alors mener une étude de réflexion transmission pour chacune de ces deux ondes planes.

**Eclairage par  $\mathbf{u}_{S,inc}^I$**

Cette onde incidente va donner premièrement naissance à une onde plane  $S$  réfléchie

$$\mathbf{u}_{S,ref} = \left[ R \begin{pmatrix} -k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u'_3 \end{pmatrix} \right] \exp(i\omega t - ik_1 x_1 + ik_2 x_2) \quad (3.25)$$

avec  $R$  un coefficient de réflexion. Elle va d'autre part générée une onde  $P$  réfléchie de vecteur d'ondes

$$\mathbf{k}_P = \begin{pmatrix} -k_{P,1} \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

avec  $k_{P,1} \in \mathbb{R}$  qui vérifie la relation de dispersion

$$(k_{P,1})^2 + (k_2)^2 = \frac{\omega^2}{c_P^2} \quad \text{c'est à dire} \quad (k_{P,1})^2 = k_1^2 + \frac{\omega^2}{c_P^2} - \frac{\omega^2}{c_S^2}. \quad (3.27)$$

L'étude n'est pas la même suivant que

$$k_1^2 > \frac{\omega^2}{c_S^2} - \frac{\omega^2}{c_P^2} \quad \text{ou} \quad k_1^2 < \frac{\omega^2}{c_S^2} - \frac{\omega^2}{c_P^2}. \quad (3.28)$$

Dans le premier cas, l'onde  $P$  réfléchie est une onde progressive

$$\mathbf{u}_{P,ref}(\mathbf{x}, t) = R_P \begin{pmatrix} -k_{P,1} \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t - ik_{P,1} x_1 + ik_2 x_2) \quad (3.29)$$

avec  $k_{P,1} = \sqrt{k_1^2 - \frac{\omega^2}{c_P^2} - \frac{\omega^2}{c_S^2}}$ . Remarquons que  $0 < k_{P,1} < k_1$  car  $0 < c_S < c_P$ .

Dans le deuxième cas, l'onde  $P$  réfléchiée est une onde évanescente

$$\mathbf{u}_{P,ref}(\mathbf{x}, t) = R_P \begin{pmatrix} ik'_{P,1} \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t - k'_{P,1}x_1 + ik_2x_2) \quad (3.30)$$

avec  $k'_{P,1} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_S^2} - \frac{\omega^2}{c_P^2} - k_1^2}$ . L'onde totale est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = & \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t + ik_1x_1 + ik_2x_2) \\ & + \left( R \begin{pmatrix} -k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{S,3} \end{pmatrix} \right) \exp(i\omega t - ik_1x_1 + ik_2x_2) \\ & + R_P \begin{pmatrix} -k_{P,1} \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega t - ik_{P,1}x_1 + ik_2x_2) \quad (3.31) \end{aligned}$$

La condition de Dirichlet s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_2 - Rk_2 - R_P k_{P,1} = 0 \\ k_1 - Rk_1 + R_P k_2 = 0 \\ u_{P,3} = 0 \end{array} \right. \quad (3.32)$$

C'est à dire

$$\begin{cases} 1 + R + R_P \frac{k_{P,1}}{k_2} = 0 \\ 1 - R + R_P \frac{k_2}{k_1} = 0 \\ u_{P,3} = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

La résolution de ce système fournit

$$\begin{cases} R = \frac{k_1 k_{P,1} - k_2^2}{k_1 k_{P,1} + k_2^2}, \\ R_P = -\frac{2k_2 k_1}{k_{P,1} k_1 + k_2^2}. \end{cases} \quad (3.34)$$

# Chapitre 4

## L'équation de Helmholtz dans l'espace libre

### 4.1 Introduction

Dans ce premier chapitre consacré aux phénomènes de propagation d'ondes établis, nous nous plaçons dans l'espace libre (ceci permet un exposé un peu moins technique des résultats à l'aide des fonctions de Green). Nous notons  $\square$  le d'Alembertien :

$$\square v(\mathbf{x}, t) = -\Delta v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t). \quad (4.1)$$

Nous nous intéressons aux problèmes de D'Alembert

$$\square v(\mathbf{x}, t)(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et } t \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

dont les solutions et les termes sources ont une dépendance temporelle harmonique

$$\begin{cases} v(\mathbf{x}, t) = \Re(u_k(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)), \\ g(\mathbf{x}, t) = \Re(f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)). \end{cases} \quad (4.3)$$

Les deux fonctions  $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  et  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  sont appelées les phaseurs de la solution et du terme source. Ils sont reliés par l'équation de Helmholtz qui prend la forme

$$-\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}. \quad (4.4)$$

Privé de ses conditions initiales, le problème de d'Alembert est mal posé : il n'y a plus unicité de sa solution. En effet, les ondes planes sont solutions de l'équation des ondes homogène ( $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  avec  $\|\mathbf{k}\| = \frac{\omega}{c}$ )

$$u(\mathbf{x}, t) = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \quad (4.5)$$

De même, le problème de Helmholtz est lui aussi mal posé. Il est facile de construire des solutions homogènes en considérant les phaseurs des ondes planes

$$u_k(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (4.6)$$

D'autre part, il n'y a pas génériquement existence de solutions dans l'espace de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}^3)$  mais seulement dans un espace beaucoup plus grand : l'espace des fonctions localement  $H^1$

$$H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3) = \left\{ u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} : \varphi u \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \right\}. \quad (4.7)$$

Dans ce chapitre, nous montrons comment il est possible de définir de manière naturelle une solution dite sortante de l'équation de Helmholtz en s'appuyant sur des arguments physiques. Nous présentons plus particulièrement les bases mathématiques de cette théorie sous trois points de vue équivalents : la condition de radiation de Sommerfeld, le principe d'amplitude limite, le principe d'absorption limite.

**La condition de radiation de Sommerfeld** Cette approche consiste à garantir l'unicité de la solution de l'équation de Helmholtz en imposant à l'infini à la solution de l'équation de Helmholtz la condition d'ondes sortantes ou de radiation de Sommerfeld qui s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Formellement, ces deux conditions consistent à assurer que la solution admet le comportement suivant à l'infini

$$u_k(\mathbf{x}) = u_{\infty}\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \frac{\exp(i\|\mathbf{k}\|\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} + o_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right). \quad (4.9)$$

En domaine temporel, cette expression devient

$$v(\mathbf{x}, t) = \Re\left(u_{\infty}\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \frac{\exp(i\|\mathbf{k}\|\|\mathbf{x}\| - i\omega t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} + o_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right)\right). \quad (4.10)$$

Cette expression correspond à une onde sphérique se déplaçant à la vitesse  $c > 0$  dans le sens  $\|\mathbf{x}\|$  croissant.

Le but de la section 4.2 est de démontrer le théorème suivant

**Théorème 4.1** *Pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact, il existe une unique fonction  $u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$  qui vérifie la condition de radiation de Sommerfeld (4.8) et l'équation de Helmholtz*

$$-\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.11)$$

**Le principe d'amplitude limite** Cette approche consiste à étudier le comportement en temps long de la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } t \geq 0, \\ v(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t v(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \quad (4.12)$$

pour un terme source ayant une dépendance temporelle harmonique

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(\mathbf{x}, t) = \Re\left(f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\right) & \forall t \geq 0, \\ g(\mathbf{x}, t) = 0 & \forall t < 0. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

avec  $\omega = kc$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact. Cette approche sélectionnera la solution sortante en introduisant de la causalité.

La section 4.3 donnera un cadre mathématique à cette approche. On y démontrera le théorème suivant

**Théorème 4.2** *On a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| v(\mathbf{x}, t) - \Re\left(u_k(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\right) \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (4.14)$$

avec  $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par le théorème 4.1.

**Le principe d'absorption limite** Cette technique consiste à introduire un petit paramètre d'absorption  $\varepsilon > 0$ . On définit alors la solution variationnelle de l'équation coercive

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{k+i\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R}^3) \text{ tel que :} \\ -\Delta u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - (k+i\varepsilon)^2 u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.15)$$

On fait alors tendre le coefficient d'absorption  $\varepsilon$  vers  $0^+$  pour définir la solution sortante de l'équation de Helmholtz. Du point de vue physique cette technique consiste à introduire le phaseur de la solution du problème d'ondes amorties

$$-\Delta v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{2\varepsilon}{c} \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 v(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) \quad (4.16)$$

Le terme de frottement introduit alors de la causalité et permet de sélectionner les ondes sortantes. L'objectif de la section 4.4 est de donner un cadre mathématique à ce principe en démontrant le résultat suivant

**Théorème 4.3** *On a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| u_{k+i\varepsilon} - u_k \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (4.17)$$

avec  $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par le théorème 4.1.

## 4.2 La condition de radiation de Sommerfeld

### 4.2.1 Fonction de Green et existence de solution sortante

Dans cette section nous démontrons l'existence d'une solution sortante de l'équation de Helmholtz à l'aide des fonctions de Green.

**Lemme 4.4** *Si  $u$  et  $\Delta u$  sont dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$  alors  $u$  est dans  $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$*

**Démonstration :**

Soit  $B$  la boule de rayon  $R$  et  $B'$  la boule de rayon  $2R$ . Par densité, il suffit de montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  tel que pour

$$\|\nabla u\|_{L^2(B)} \leq C \left( \|u\|_{L^2(B')} + \|\Delta u\|_{L^2(B')} \right), \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \quad (4.18)$$

Soit  $\chi$  une fonction  $\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\chi(\mathbf{x}) = 1$  dans  $B$  et  $\chi(\mathbf{x}) = 0$  hors de  $B'$  décroissante suivant  $r$ . D'après l'identité de Green, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \chi u\|^2 d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\chi u) \chi u d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \quad (4.19)$$

On peut alors évaluer le terme à la droite de l'égalité en développant le laplacien

$$\Delta(\chi u) = \chi \Delta u + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u + u \Delta \chi. \quad (4.20)$$

Il suit que

$$\chi \Delta(\chi u) = \chi^2 \Delta u + 2 \nabla \chi \cdot \nabla(\chi u) + (\chi \Delta \chi - 2 \nabla \chi \cdot \nabla \chi) u. \quad (4.21)$$

On peut alors injecter cette dernière expression dans (4.19)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \chi u\|^2 d\mathbf{x} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \chi^2 u \Delta u + 2 \nabla \chi \cdot \nabla(\chi u) u \\ &\quad + (\chi \Delta \chi - 2 \nabla \chi \cdot \nabla \chi) u^2 d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Comme  $\|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq \|u\|_{L^2(B')} \|\Delta u\|_{L^2(B')} \\ &\quad + 2 C_1 \|\nabla \chi u\|_{B'} \|u\|_{L^2(B')} + C_2 \|u\|_{L^2(B')}^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec  $C_1 = \|\nabla \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$  et  $C_2 = \|\Delta \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ . Comme  $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ , on a

$$\begin{aligned} \|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq \frac{\|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}{2} \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} + 2 C_1^2 + C_2 \right) \|u\|_{L^2(B)}^2 + \frac{\|\Delta u\|_{L^2(B)}^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Il suit que

$$\frac{\|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}{2} \leq \left( \frac{1}{2} + 2 C_1^2 + C_2 \right) \|u\|_{L^2(B')}^2 + \frac{\|\Delta u\|_{L^2(B')}^2}{2}. \quad (4.25)$$

Comme  $\chi = 1$  dans  $B$ , il suit

$$\|\nabla u\|_{L^2(B)} \leq \|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (4.26)$$

On déduit (4.18). Ceci termine la preuve de la proposition. ■



Pour tout  $k \in \mathbb{C}$ , on introduit la fonction  $G_k : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$G_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} \quad (4.27)$$

**Lemme 4.5** *Pour tout  $k \in \mathbb{C}$ , la fonction  $G_k$  est une solution fondamentale de l'opérateur  $-\Delta - k^2$ , ie.*

$$-\Delta G_k - k^2 G_k = \delta(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (4.28)$$

**Démonstration :**

Remarquons tout d'abord que  $G_k$  est un élément de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  car  $G_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ . Soit  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ . Nous raisonnons au sens des distributions

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \Delta G_k + k^2 G_k, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \int_{\mathbb{R}^3} G_k(\mathbf{x}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}) + k^2 \Phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \end{aligned} \right. \quad (4.29)$$

avec  $I_\varepsilon$  donné par

$$I_\varepsilon = \int_{\{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}} G_k(\mathbf{x}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}) + k^2 \Phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (4.30)$$

D'après la formule de Green, on a

$$\left\{ \begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}} G_k(\mathbf{x}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}) + k^2 \Phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}} (\Delta G_k(\mathbf{x}) + k^2 G_k(\mathbf{x})) \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\{\|\mathbf{x}\| = \varepsilon\}} G_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial r}(\mathbf{x}) - \frac{\partial G_k}{\partial r}(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} \end{aligned} \right. \quad (4.31)$$

Il ne nous reste plus qu'à évaluer la dernière ligne car  $\Delta G_k(\mathbf{x}) + k^2 G_k(\mathbf{x}) = 0$  hors de l'origine. Comme  $\Phi$  est  $C^\infty$ , on a

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) + O(\|\mathbf{x}\|) \quad \text{et} \quad \partial_r \Phi(\mathbf{x}) = O(1). \quad (4.32)$$

De même, la fonction de Green vérifie

$$G_k(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) \quad \text{et} \quad \partial_r G_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2} + O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right). \quad (4.33)$$

Il suit

$$\begin{cases} I_\varepsilon = - \int_{\{\|\mathbf{x}\|=\varepsilon\}} \frac{\Phi(0)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} + \int_{\{\|\mathbf{x}\|=\varepsilon\}} O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) ds_{\mathbf{x}} \\ = -\Phi(0) + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1) \end{cases} \quad (4.34)$$

Ainsi, on a

$$\langle \Delta G_k + k^2 G_k, \Phi \rangle = -\Phi(0) \quad (4.35)$$

Ceci termine la preuve.  $\blacksquare$

**Proposition 4.6** Soient  $k \in \mathbb{R}$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact. La fonction  $u_k(\mathbf{x}) = G_k * f(\mathbf{x})$  vérifie

$$\begin{cases} u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3), \\ -\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{cases} \quad (4.36)$$

**Démonstration :**

Par définition, la fonction  $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  est donnée par

$$u_k(\mathbf{x}) = G_k * f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (4.37)$$

La théorie de la convolution dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  nous permet d'obtenir que  $u_k$  est une solution de l'équation de Helmholtz inhomogène

$$-(\Delta + k^2)(G_k * f)(\mathbf{x}) = -(\Delta G_k + k^2 G_k) * f(\mathbf{x}) = \delta * f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (4.38)$$

Nous remarquons aussi que  $u_k \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$  d'après le lemme 4.4. Comme le support de  $f$  est borné, il existe un réel positif  $\rho$  tel que la boule de rayon  $\rho$  contienne le support de  $f$ . Pour tout  $\mathbf{y}$  dans le support de  $f$  et pour tout  $\mathbf{x}$  tel que  $\|\mathbf{x}\| > 2\rho$ , on a

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} + \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} - \|\mathbf{y}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} + \frac{2\rho}{2} - \rho \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}. \quad (4.39)$$

En majorant l'expression (4.37), il suit

$$|u_k(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{2\pi\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad (4.40)$$

On intègre cette expression sur la sphère de rayon  $R$

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} \leq \frac{1}{\pi} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^2 = O_{R \rightarrow +\infty}(1). \quad (4.41)$$

De même, on a pour  $\|\mathbf{x}\| > 2\rho$

$$\nabla u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} \left( ik - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.42)$$

$$\partial_r u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \left( ik - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.43)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_r u_k(\mathbf{x}) - ik u_k(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \left( 1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) ik f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \right. \quad (4.44)$$

Il suit l'inégalité

$$\left\{ \begin{aligned} |\partial_r u_k(\mathbf{x}) - ik u_k(\mathbf{x})| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} \\ &+ k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \left( 1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) d\mathbf{y}. \end{aligned} \right. \quad (4.45)$$

Nous remarquons alors que

$$1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \left( \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (4.46)$$

Il suit d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left| 1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right| \leq \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right\| \quad (4.47)$$

Comme

$$\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} = \left( \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \quad (4.48)$$

on a

$$\left| 1 - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|} \right| \leq \left| \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad (4.49)$$

D'où d'après l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| 1 - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right| \leq \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq 2 \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}. \quad (4.50)$$

On déduit de (4.39) et (4.45) que

$$\left| \partial_r u_k(\mathbf{x}) - iku_k(\mathbf{x}) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + 2k\|\mathbf{y}\|)|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} \quad (4.51)$$

On déduit de (4.39)

$$\left| \partial_r u_k(\mathbf{x}) - iku_k(\mathbf{x}) \right| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + 2k\|\mathbf{y}\|)|f(\mathbf{y})|}{\pi} d\mathbf{y} \right) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \quad (4.52)$$

En intégrant sur la sphère de rayon  $R$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \left| (\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x}) \right|^2 ds_{\mathbf{x}} \leq \frac{4}{\pi R^2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^2 \left( 1 + \frac{k\rho}{2} \right)^2 \\ = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^2} \right). \end{array} \right. \quad (4.53)$$

■

Pour déterminer le cadre fonctionnelle de la fonction  $u_k$ , nous avons besoin d'un résultat classique de la théorie du potentiel newtonien.

**Proposition 4.7** Soient  $G_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|}$ ,  $H_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2}$  et  $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact. Les fonction  $w_g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  et  $h_g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  définies par

$$w_g(\mathbf{x}) = G_0 * g(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad h_g = H_0 * g \quad (4.54)$$

vérifie  $w_g \in L^6(\mathbb{R}^3)$ ,  $h_g \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et

$$-\Delta w_g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \nabla w_g = -h_g. \quad (4.55)$$

**Démonstration :**

C'est un résultat classique de la théorie du potentiel newtonien dont on rappelle une preuve directe.

D'après la proposition 4.5, la fonction  $G_0$  est une solution fondamentale du laplacien. D'autre part, on a  $\nabla G_0 = -H_0$ . Il suit que  $w_g = G_0 * g$  vérifie (4.55). Montrons maintenant que  $w_g$  est dans  $L^6(\mathbb{R}^3)$ . Soit  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  une fonction qui vaut 1 au voisinage de 0 et 0 au voisinage de l'infini. Remarquons que d'après l'inégalité de convolution de Young ( $g \in L^1(\mathbb{R}^3)$  car  $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et  $g$  à support compact.

$$(\chi G_0) * g \in L^6(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad \chi G_0 \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad (4.56)$$

$$((1 - \chi)G_0) * g \in L^6(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad (1 - \chi)G_0 \in L^6(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^1(\mathbb{R}^3). \quad (4.57)$$

On en déduit que  $w_g = \chi G_0 * g + ((1 - \chi)G_0) * g$  est dans  $L^6(\mathbb{R}^3)$ .

De même, on a  $h_g \in L^2(\mathbb{R}^3)$  car

$$(\chi H_0) * g \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad \chi H_0 \in L^1(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad (4.58)$$

$$((1 - \chi)H_0) * g \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad (1 - \chi)H_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^1(\mathbb{R}^3). \quad (4.59)$$

Ceci termine la preuve. ■

**Proposition 4.8** *La fonction  $u_k = G_k * f$  est dans l'espace*

$$u_k \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \quad u_k \in L^6(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \nabla \hat{u}_k \in L^2(\mathbb{R}^3). \quad (4.60)$$

avec  $\hat{u}_k(\mathbf{x}) = u_k(\mathbf{x}) \exp(-ik\|\mathbf{x}\|)$

**Démonstration :**

Une borne supérieure de (4.37) est donnée par

$$\left| u_k(\mathbf{x}) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y} = w_{|f|}(\mathbf{x}) \quad (4.61)$$

On déduit de la proposition 4.7 que  $u_k \in L^6(\mathbb{R}^3)$ . Comme  $-\Delta u_k - k^2 u_k = f$  dans  $\mathbb{R}^3$ , il suit qu'à la fois  $u_k$  et  $\Delta u_k$  sont dans  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ . On déduit du lemme 4.4 que  $u_k \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ .

Nous remarquons que

$$\exp(ikr) \nabla \hat{u}_k(\mathbf{x}) = \nabla u_k - ik u_k(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (4.62)$$

Cette expression se calcule à l'aide des formules de représentation

$$u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \nabla u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}). \quad (4.63)$$

$$\nabla G_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ikr)}{4\pi} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{ik}{\|\mathbf{x}\|} \right) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (4.64)$$

il suit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp(ikr) \nabla \hat{u}_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ - ik \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{array} \right. \quad (4.65)$$

En majorant, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\nabla \hat{u}_k(\mathbf{x})\| = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} \\ + k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| d\mathbf{y}. \end{array} \right. \quad (4.66)$$

On déduit alors de (4.50) que

$$\|\nabla \hat{u}_k(\mathbf{x})\| = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + 2k\|\mathbf{y}\|) |f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} = H_0 * g \quad (4.67)$$

avec  $g(\mathbf{y}) = (1 + 2k\|\mathbf{y}\|) |f(\mathbf{y})|$  et  $H_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2}$ . Comme  $f$  est un élément de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact,  $g$  est aussi à support compact dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . D'après la proposition 4.7 il suit que  $\nabla \hat{u}_k \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . ■

## 4.2.2 Unicité de la solution sortante de l'équation d'Helmholtz

L'unicité de la solution sortante de l'équation provient du Théorème de Rellich :

**Théorème 4.9 (Théorème de Rellich sur tout  $\mathbb{R}^3$ )** Soit  $k > 0$ . Si  $u_k \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$

vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{cases} \quad (4.68)$$

alors la fonction  $u_k$  est identiquement nulle.

### Démonstration :

Remarquons tout d'abord que  $u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$  d'après le lemme 4.4. D'autre part, ses trois dérivées partielles vérifient

$$\partial_i u_k \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \Delta \partial_i u_k + k^2 \partial_i u_k = 0. \quad (4.69)$$

D'après le lemme 4.4, il suit que  $\partial_i u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ . Ainsi  $u_k$  est un élément de  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ . On a d'après la formule de Green

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla u_k(\mathbf{x})|^2 + \Delta u_k(\mathbf{x}) \overline{u_k(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \overline{u_k(\mathbf{x})} \partial_r u_k(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}. \quad (4.70)$$

Il suit

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla u_k(\mathbf{x})|^2 - k^2 |u_k(\mathbf{x})|^2 = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \overline{u_k(\mathbf{x})} (\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x}) + ik |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (4.71)$$

On note  $\widehat{u}_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par

$$\widehat{u}_k(\mathbf{x}) = \frac{u_k(\mathbf{x})}{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}. \quad (4.72)$$

Il suit de l'identité  $\nabla \widehat{u}_k + ik \widehat{u}_k \widehat{e}_r = \exp(-ik\|\mathbf{x}\|) \nabla u_k$  que

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla \widehat{u}_k + ik \widehat{u}_k \widehat{e}_r|^2 - k^2 |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (4.73)$$

Ceci se simplifie en

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla \widehat{u}_k|^2 + ik \left( \widehat{u}_k \overline{\partial_r \widehat{u}_k} - \overline{\widehat{u}_k} \partial_r \widehat{u}_k \right) d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (4.74)$$

En prenant la partie imaginaire, on a

$$0 = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \widehat{u}_k \partial_r \widehat{u}_k - \widehat{u}_k \overline{\partial_r \widehat{u}_k} + 2ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}} \quad (4.75)$$

On déduit alors que

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} ik (\widehat{u}_k \partial_r \widehat{u}_k - \widehat{u}_k \overline{\partial_r \widehat{u}_k}) d\mathbf{x} = 2k^2 \int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} \quad (4.76)$$

et par conséquent

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} |\nabla \widehat{u}_k|^2 + 2k^2 |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}} \quad (4.77)$$

En prenant la partie imaginaire de cette expression, on obtient

$$k \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |\widehat{u}_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = -\Im \left( \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k(\mathbf{x}) \overline{\widehat{u}_k(\mathbf{x})} \right) ds_{\mathbf{x}} \quad (4.78)$$

D'après le théorème de Cauchy-Schwartz, on a

$$k \|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})}^2 \leq \|\partial_r \widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} \|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} \quad (4.79)$$

et par conséquent

$$\|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} \leq \frac{\|\partial_r \widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})}}{k}. \quad (4.80)$$

Comme  $\widehat{u}_k(\mathbf{x}) = \exp(-ik\|\mathbf{x}\|)u_k(\mathbf{x})$ , on déduit alors des conditions de radiation de Sommerfeld que

$$\|\partial_r \widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} = \|\partial_r u_k - ik u_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R} \right) \quad (4.81)$$

et d'après (4.80)

$$\|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R} \right). \quad (4.82)$$

En remarquant que d'après le théorème de Cauchy-Schwartz et (4.81) et (4.82)

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^2} \right) \quad (4.83)$$

on peut alors passer à la limite sur (4.77)

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \widehat{u}_k|^2 + 2k^2 |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (4.84)$$

Il suit que  $\widehat{u}_k$  et par conséquent  $u_k$  s'annulent sur tout  $\mathbb{R}^3$ . ■



### 4.3 Le principe d'amplitude limite

Le problème (5.13) est bien posé d'après le théorème de Hille-Yoshida. Nous allons étudier le comportement en temps long de sa solution par l'intermédiaire d'une expression basée sur les fonctions de Green.

**Lemme 4.10** Une solution fondamentale du d'alembertien  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  est la distribution  $G$  de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$  est définie par

$$\langle G, \Phi \rangle = c \int_0^\infty \left( \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\Phi(\mathbf{x}, \tau)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) d\tau. \quad (4.85)$$

**Démonstration :**

Le d'alembertien au sens des distributions de  $G$  est calculé par dualité

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \langle G, \square \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ = c \int_0^\infty \left( \int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{\square \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt \end{array} \right. \quad (4.86)$$

Il peut aussi être décomposé de la manière suivante

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi - \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) - \frac{1}{r^2} \Delta_\Gamma. \quad (4.87)$$

D'après la formule de Green sur la sphère, on a

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{\Delta_\Gamma \Phi(\mathbf{x}, \tau)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^3} ds_{\mathbf{x}} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\Phi(\mathbf{x}, \tau)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^3} \Delta_\Gamma(1) ds_{\mathbf{x}} = 0. \quad (4.88)$$

Soit  $\bar{\Phi}(r, t)$  la valeur moyenne de  $\Phi$  sur la sphère de rayon  $r$

$$\bar{\Phi}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta, \varphi, t) \sin(\theta) d\theta d\varphi. \quad (4.89)$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_t^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial_t^2 \Phi(c\tau, \theta, \varphi, \tau)}{4\pi} \frac{\tau}{c} \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_r^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial_r^2 \Phi(c\tau, \theta, \varphi, \tau)}{4\pi} c\tau \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{2\partial_r \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{2\partial_r \Phi(c\tau, \theta, \varphi, \tau)}{4\pi} \sin(\theta) d\theta d\varphi. \end{array} \right. \quad (4.90)$$

On peut alors commuter l'intégrale et la dérivée seconde

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_t^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \frac{\tau}{c} \partial_t^2 \bar{\Phi}(c\tau, \tau), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_r^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = c\tau \partial_r^2 \bar{\Phi}(c\tau, \tau), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{2\partial_r \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} = 2\partial_r \bar{\Phi}(c\tau, \tau). \end{array} \right. \quad (4.91)$$

En sommant ces trois expressions, il suit

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\square \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \frac{\tau}{c} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(c\tau, \tau) - c\tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(c\tau, \tau) - 2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(c\tau, \tau) d\tau. \quad (4.92)$$

On obtient

$$\langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \int_0^\infty \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(c\tau, \tau) - c^2 \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(c\tau, \tau) - 2c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(c\tau, \tau) d\tau. \quad (4.93)$$

Le calcul de cette intégrale s'effectue en introduisant la fonction

$$\Psi(r, t) = \frac{r}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}(r, t) - \bar{\Phi}(r, t) - r \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(r, t) \quad (4.94)$$

qui vérifie

$$\frac{d}{d\tau} \left( \Psi(c\tau, \tau) \right) = \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(c\tau, \tau) - c^2 \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(c\tau, \tau) - 2c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(c\tau, \tau). \quad (4.95)$$

Ainsi il suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} = \left[ \Psi(c\tau, \tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=+\infty} = -\Psi(0, 0) \\ = \overline{\Phi(0, 0)} = \Phi(0, 0). \end{array} \right. \quad (4.96)$$

C'est à dire

$$\square G(\mathbf{x}, t) = \delta_{\mathbf{x}} \delta_t \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}). \quad (4.97)$$

■

**Lemme 4.11** *L'unique solution de (5.13) est donnée par*

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|<ct\}} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c})}{4\pi \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \quad (4.98)$$

**Démonstration :**

L'unique solution de (5.13) est donnée par

$$u(\mathbf{x}, t) = G * g(\mathbf{x}, t) \quad (4.99)$$

Le produit de convolution au sens des distributions est défini par

$$\langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \langle G \otimes g, \psi \rangle_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} \quad \text{avec } \psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \tau) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau) \quad (4.100)$$

C'est à dire

$$\left\{ \begin{aligned} \langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} &= c \int_0^{+\infty} \left( \int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^4} g(\mathbf{y}, \tau) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau) d\mathbf{y} d\tau}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt \\ &= c \int_{\mathbb{R}^4} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{g(\mathbf{y}, \tau) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt d\mathbf{y} d\tau \end{aligned} \right. \quad (4.101)$$

On effectue alors le changement de variable

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad t' = t + \tau, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y}, \quad \rho = ct. \quad (4.102)$$

On obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} &= \int_{\mathbb{R}^4} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\rho\}} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\rho}{c}) \varphi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) d\rho d\mathbf{y} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\rho\}} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c}) \varphi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) d\rho d\mathbf{y} dt \end{aligned} \right. \quad (4.103)$$

On remarque alors que

$$\int_0^{+\infty} \left( \int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\rho\}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) ds_{\mathbf{x}} \right) d\rho = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{x}. \quad (4.104)$$

Il suit

$$\left\{ \begin{aligned} \langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} &= \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c}) \varphi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c})}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \right) \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \right. \quad (4.105)$$

D'où  $G * g$  est donnée par

$$G * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c})}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}. \quad (4.106)$$

Enfin que  $g(\mathbf{x}, t) = 0$  pour tout  $t < 0$ , on obtient (4.98). ■

**Lemme 4.12** *La solution du problème (5.13) est donnée par*

$$u(\mathbf{x}, t) = \Re\left(u_k(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\right) + r(\mathbf{x}, t). \quad (4.107)$$

avec

$$\begin{cases} u_k(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{y}) \exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}, \\ |r(\mathbf{x}, t)| &\leq \int_{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > ct} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \end{cases} \quad (4.108)$$

**Démonstration :**

Il nous faut tenir compte ici de la forme particulière du terme source

$$g(\mathbf{y}, t) = \Re\left(f(\mathbf{y}) \exp(-i\omega t)\right). \quad (4.109)$$

Il suit d'après le lemme 4.11

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) &= \Re\left(\exp(-i\omega t) \int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < ct} \frac{f(\mathbf{y}) \exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}\right) \\ &= \Re\left(\exp(-i\omega t) u_k(\mathbf{x})\right) + r(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (4.110)$$

avec

$$r(\mathbf{x}, t) = \Re\left(\exp(-i\omega t) \int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > ct} \frac{f(\mathbf{y}) \exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}\right). \quad (4.111)$$

Cette dernière fonction peut être majorée par

$$|r(\mathbf{x}, t)| = \int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > ct} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}. \quad (4.112)$$

Ceci termine la preuve. ■

On est en mesure de démontrer le principe d'amplitude limite

**Théorème 4.13** *On a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\mathbf{x}, t) - \Re(\exp(-i\omega t) u_k(\mathbf{x}))\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (4.113)$$

### Démonstration :

Il nous suffit de montrer

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|r(\cdot, t)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (4.114)$$

On remarque tout d'abord que

$$\left| r(\mathbf{x}, t) \right| \leq w_{|f|}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall t > 0 \quad (4.115)$$

avec  $w_{|f|}$  défini par (4.54) qui vérifie d'après le lemme 4.7,

$$\|w_{|f|}\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} < +\infty. \quad (4.116)$$

D'autre part comme  $f$  est à support compact, on a

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \exists t_{\mathbf{x}} > 0 \quad \forall \mathbf{y} \notin B(\mathbf{x}, ct_{\mathbf{x}}) \quad f(\mathbf{y}) = 0. \quad (4.117)$$

Il suit que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et pour  $t > t_{\mathbf{x}}$

$$r(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.118)$$

Ainsi, la fonction  $r(\mathbf{x}, t)$  converge simplement pour  $t$  tendant vers l'infini. On peut alors appliquer le théorème de Lebesgues. ■

## 4.4 Le principe d'absorption limite

**Proposition 4.14** Soient  $k, \varepsilon > 0$  et  $f$  : une fonction de classe  $L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact. La fonction

$$u_{k+i\varepsilon} = G_{k+i\varepsilon} * f = \int_{\Gamma} \frac{\exp((ik - \varepsilon)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) f(\mathbf{y})}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} ds_{\mathbf{y}} \quad (4.119)$$

est l'unique élément de  $H^1(\mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$-\Delta u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - (k + i\varepsilon)^2 u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (4.120)$$

### Démonstration :

D'après le lemme 4.5,  $G_{k+i\varepsilon}$  est une fonction de Green de  $-\Delta - (k + i\varepsilon)^2$ . La fonction  $u_{k+i\varepsilon} = G_{k+i\varepsilon} * f$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) + (k + i\varepsilon)^2 u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) = \left( \Delta G_{k+i\varepsilon} + (k + i\varepsilon)^2 G_{k+i\varepsilon} \right) * f(\mathbf{x}) \\ \\ = -\delta * f(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}). \end{array} \right. \quad (4.121)$$

Pour  $\|\mathbf{x}\| > 2r$  ( $\text{support}(f) \subset B(0, r)$ ), on a d'après (4.39)

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}. \quad (4.122)$$

En majorant l'expression (4.119), il suit qu'au voisinage de l'infini

$$|u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x})| \leq \frac{\exp(-\frac{\varepsilon\|\mathbf{x}\|}{2})}{2\pi\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad (4.123)$$

Il suit que la fonction  $u_{k+i\varepsilon}$  est donc dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . On agit de même pour le gradient. On a

$$\nabla u_k(\mathbf{x}) = (\nabla G_{k+i\varepsilon}) * f \quad (4.124)$$

Comme  $\nabla G_{k+i\varepsilon}$  est exponentiellement décroissant  $u_{k+i\varepsilon}$  is  $H^1(\mathbb{R}^3)$ . ■

On est en mesure de démontrer le théorème 4.3 :

### Démonstration :

nous remarquons tout d'abord que

$$G_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - G_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} \left( \exp(-\varepsilon\|\mathbf{x}\|) - 1 \right) \quad (4.125)$$

Il suit que

$$\begin{aligned} u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) &= (G_{k+i\varepsilon} - G_k) * f(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \left( \exp(-\varepsilon\|\mathbf{x}\|) - 1 \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.126)$$

On peut alors passer à la valeur absolue et majorer

$$|u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x})| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \left| \exp(-\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) - 1 \right| d\mathbf{y} \quad (4.127)$$

Comme  $0 \leq \exp(-\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \leq 1$  on a  $\left| \exp(-\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) - 1 \right| \leq 1$  et par conséquent

$$|u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x})| \leq w_{|f|}(\mathbf{x}) \quad (4.128)$$

avec  $w_{|f|}$  la fonction définit par (4.54) du lemme 4.7.

D'autre part on a pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{y} \in \text{supp}(f) \subset B(0, \rho)$

$$\left| \exp(-\varepsilon(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)) - 1 \right| \leq \left| \exp(-\varepsilon(\|\mathbf{x}\| - r)) - 1 \right| \quad (4.129)$$

Il suit de (4.127)

$$\left| u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) \right| \leq w_{|f|}(\mathbf{x}) \left| \exp(-\varepsilon(\|\mathbf{x}\| - r)) - 1 \right| \quad (4.130)$$

Comme  $w_{|f|} \in L^6(\mathbb{R}^3)$  et que le terme de droite de (4.130) tend simplement vers 0 presque partout pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, il suit du théorème de Lebesgues

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u_k - u_{k+i\varepsilon} \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (4.131)$$

■

## 4.5 Développement en champ lointain

Nous rappelons que  $f$  est une fonction de  $L^2(\Omega)$  à support compact dans la boule de centre  $\rho$

**Théorème 4.15** *On a le développement suivant au voisinage de l'infini*

$$u_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} \left( u_\infty(\widehat{\mathbf{x}}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \right) \quad (4.132)$$

avec

$$\widehat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{et} \quad u_\infty(\widehat{\mathbf{x}}) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-ik\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (4.133)$$

et

$$|\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \frac{2\rho + 4k\rho^2}{\|\mathbf{x}\|} \int_{\Omega} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y}, \quad \text{for } \|\mathbf{x}\| \geq 2\rho. \quad (4.134)$$

**Démonstration :**

Soit

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{4\pi\|\mathbf{x}\|}{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)} u_k(\mathbf{x}) - u_\infty(\widehat{\mathbf{x}}) \quad (4.135)$$

Il nous faut montrer que  $\varepsilon$  tend vers 0 pour  $\mathbf{x}$  tendant vers  $+\infty$ . Comme  $u_k = G_k * f$ , on a

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \exp(ik(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|)) - \exp(-ik\widehat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.136)$$

Ceci peut se réécrire en  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_1(\mathbf{x}) + \varepsilon_2(\mathbf{x})$  avec

$$\begin{cases} \varepsilon_1(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \left( \exp(ik(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|)) - \exp(-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ \varepsilon_2(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \left( \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - 1 \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{cases} \quad (4.137)$$

Pour tout  $\|\mathbf{x}\| \geq 2\rho$  et  $\|\mathbf{y}\| \leq \rho$ , on a  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \geq \rho$  et par conséquent

$$\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq 1 + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq 1 + \frac{\rho}{\rho} = 2. \quad (4.138)$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} A = \left| \exp(ik(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|)) - \exp(-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \right| \\ \leq \left| \exp(ik(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| + \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y})) - 1 \right| \end{cases} \quad (4.139)$$

Comme pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $|\exp(i\lambda) - 1| \leq |\lambda|$ , on a

$$A \leq k \left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| + \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right| \quad (4.140)$$

Comme  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2$ , il suit que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \left( \|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right)^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y})^2 \quad (4.141)$$

D'où, on a

$$\left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \left( \|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right)^2 \right| \leq \|\mathbf{y}\|^2 + \|\hat{\mathbf{x}}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \leq 2\|\mathbf{y}\|^2 \leq 2\rho^2 \quad (4.142)$$

D'autre part, pour  $\|\mathbf{x}\| \geq 2\rho$  et  $\|\mathbf{y}\| \leq \rho$ , on a  $\|\mathbf{y}\| \leq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}$

$$\left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}\| - \|\hat{\mathbf{x}}\| \|\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| \quad (4.143)$$

Par conséquent, on a

$$A \leq k \frac{\left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \left( \|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right)^2 \right|}{\left| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \left( \|\mathbf{x}\| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right) \right|} \leq \frac{2k\rho^2}{\|\mathbf{x}\|} \quad (4.144)$$



On déduit donc que

$$|\varepsilon_1(\mathbf{x})| \leq \frac{4k\rho^2}{\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad \text{pour } \|\mathbf{x}\| \geq 2\rho. \quad (4.145)$$

De même, on a

$$|\varepsilon_2(\mathbf{x})| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - 1 \right| |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad (4.146)$$

Pour  $\|\mathbf{x}\| \geq 2\rho$  et  $\|\mathbf{y}\| \leq \rho$ , on a

$$\left| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - 1 \right| = \frac{\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{2\rho}{\|\mathbf{x}\|} \quad (4.147)$$

Il suit que

$$|\varepsilon_2(\mathbf{x})| \leq \frac{2\rho}{\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad \text{pour } \|\mathbf{x}\| \geq 2\rho. \quad (4.148)$$

Ainsi  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_1(\mathbf{x}) + \varepsilon_2(\mathbf{x})$  vérifie

$$|\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \frac{2\rho + 4k\rho^2}{\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad \text{pour } \|\mathbf{x}\| \geq 2\rho. \quad (4.149)$$

Ceci termine la preuve. ■

# Chapitre 5

## Equation de Helmholtz en milieu hétérogène et anisotrope

### 5.1 Milieu anisotrope

L'équation de Helmholtz anisotrope s'écrit

$$-\nabla \cdot (A \nabla u_{k,A}) - k^2 u_{k,A} = -f \quad (5.1)$$

avec  $A$  une matrice carré 3 par 3 symétrique définie positive.

Comme  $A$  est symétrique définie positive, on peut construire en diagonalisant  $A$  une matrice  $A^{\frac{1}{2}}$  symétrique définie positive qui vérifie

$$A = A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2)$$

Nous considérons alors le changement de variables

$$A^{\frac{1}{2}} \mathbf{y} = \mathbf{x}, \quad \tilde{u}_{k,A}(\mathbf{y}) = u_{k,A}(A^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \tilde{f}(\mathbf{y}) = f(A^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}) \quad (5.3)$$

On parle de transformation de  $\Pi$ 'in. On a alors

$$\Delta \tilde{u}_{k,A}(\mathbf{y}) + k^2 \tilde{u}_{k,A}(\mathbf{y}) = -\tilde{f}(\mathbf{y}). \quad (5.4)$$

On déduit alors que la manière naturelle de définir les solutions sortantes consiste à traduire les conditions aux limites de Sommerfeld

$$\begin{cases} \tilde{u}_{k,A}(\mathbf{y}) = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \right), \\ \nabla \tilde{u}_{k,A}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} - ik \tilde{u}_{k,A}(\mathbf{y}) = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \right). \end{cases} \quad (5.5)$$

dans les coordonnées originales

$$\begin{cases} u_{k,A}(\mathbf{x}) = \underset{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{\|A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|} \right), \\ \left( A^{\frac{1}{2}} \nabla u_{k,A}(\mathbf{x}) \right) \cdot \left( \frac{A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}}{\|A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|} \right) - ik u_{k,A}(\mathbf{x}) = \underset{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{\|A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|^2} \right). \end{cases} \quad (5.6)$$

Par équivalence de norme, on a

$$\|\mathbf{x}\| = \underset{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}{\Theta} (\|A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|) \quad (5.7)$$

D'autre part, comme

$$\left( A^{\frac{1}{2}} \nabla u_{k,A}(\mathbf{x}) \right) \cdot \left( \frac{A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}}{\|A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|} \right) = \left( \nabla u_{k,A}(\mathbf{x}) \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{x}}{\|A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|} \right) = \partial_r u_{k,A}(\mathbf{x}) \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|}. \quad (5.8)$$

il suit les conditions de Sommerfeld anisotrope

$$\begin{cases} u_{k,A}(\mathbf{x}) = \underset{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \right), \\ \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|} \partial_r u_{k,A}(\mathbf{x}) - ik u_{k,A}(\mathbf{x}) = \underset{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \right). \end{cases} \quad (5.9)$$

D'autre part la fonction de Green de cette équation est donnée par

$$G_{k,A}(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik\|A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|)}{4\pi\|A^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|}. \quad (5.10)$$

On déduit aussi du chapitre précédent les résultats suivants

**Théorème 5.1** *Pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact, il existe une unique fonction  $u_{k,A} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$  qui vérifie les conditions de radiation de Sommerfeld anisotrope (5.9) et l'équation de Helmholtz anisotrope*

$$-\nabla \cdot (A \nabla u_{k,A})(\mathbf{x}) - k^2 u_{k,A}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (5.11)$$

Cette solution est donnée par

$$u_{k,A} = G_{k,A} * f. \quad (5.12)$$

**Théorème 5.2 (Le principe d'amplitude limite en milieu anisotrope)** Soit  $v_A$  la solution du problème posé pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et  $t \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (A\nabla v_A)(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_A}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = \Re\left(f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\right), \\ v_A(\mathbf{x}, 0) = 0, \\ \partial_t v_A(\mathbf{x}, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (5.13)$$

avec  $\omega = kc$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact. On a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| v_A(\mathbf{x}, t) - \Re\left(u_{k,A}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\right) \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (5.14)$$

avec  $u_{k,A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par le théorème 5.1.

**Théorème 5.3 (Le principe d'absorption limite en milieu anisotrope)** Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $u_{k+i\varepsilon,A}$  la fonction de  $H^1(\mathbb{R}^3)$  qui vérifie

$$-\nabla \cdot (A\nabla u_{k+i\varepsilon,A})(\mathbf{x}) - (k+i\varepsilon)^2 u_{k+i\varepsilon,A}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (5.15)$$

On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| u_{k+i\varepsilon,A} - u_{k,A} \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (5.16)$$

avec  $u_{k,A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par le théorème 5.1.

## 5.2 Equation de Helmholtz en milieu hétérogène

Soit  $\Omega$  un ensemble compact de frontière régulière de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  une fonction à support inclus dans  $\Omega$ . Soit  $k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  dont la valeur est  $k_0$  hors de  $\Omega$ .

Nous nous intéressons à la résolution du problème de Helmholtz inhomogène

$$-\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.17)$$

avec  $u_k \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$  une fonction vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r u_k(\mathbf{x}) - ik_0 u_k(\mathbf{x}))|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Nous notons  $S_0$  l'opérateur

$$\left\{ \begin{array}{l} L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)h \longmapsto u_0 \end{array} \right. \quad (5.19)$$

qui associe à  $h \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support borné dans  $\Omega$  (cet espace peut être identifié à  $L^2(\Omega)$ ) la restriction à  $\Omega$  de la solution sortante du problème de Helmholtz homogène

$$-\Delta u(\mathbf{x}) - k_0^2 u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (5.20)$$

En remarquant que  $u_k$  vérifie

$$-\Delta u_k(\mathbf{x}) - k_0^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + (k^2(\mathbf{x}) - k_0^2) u_k(\mathbf{x}) \quad (5.21)$$

La fonction  $u_k$  est solution de l'équation de point fixe posé dans  $L^2(\Omega)$

$$u_k = G_{k_0} * \left[ f + (k^2 - k_0^2) u_k \right] \quad (5.22)$$

Il suit que la restriction  $\tilde{u}_k$  à  $\Omega$  de  $u_k$  vérifie l'équation de point fixe

$$\tilde{u}_k = S_0 f + S_0 \left[ (k^2 - k_0^2) \tilde{u}_k \right] \quad (5.23)$$

C'est un problème qui relève de l'alternative de Fredholm, voir Annexe A.4. Pour démontrer que cette équation définit de manière unique  $\tilde{u}_k \in L^2(\Omega)$ , il nous suffit d'après l'alternative de Fredholm de démontrer les deux propositions suivantes

**Proposition 5.4** *L'opérateur  $K$  défini par*

$$\left\{ \begin{array}{l} K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ v \longrightarrow S_0 \left[ (k^2 - k_0^2) v \right] \end{array} \right. \quad (5.24)$$

*est un opérateur compact*

**Démonstration :**

Pour démontrer que cet opérateur linéaire est compact, il suffit de démontrer que son image est incluse dans  $H^1(\Omega)$  qui est un ensemble compact de  $L^2(\Omega)$ .

Par définition, la fonction  $Kv$  est la restriction de la solution  $u$  sortante du problème de Helmholtz

$$-\Delta u(\mathbf{x}) - k_0^2 u(\mathbf{x}) = \left( k^2(\mathbf{x}) - k_0^2 \right) v(\mathbf{x}), \quad \text{sur } \mathbb{R}^3. \quad (5.25)$$

Comme  $v \in L^2(\Omega)$ , on a d'après la proposition 4.8 que  $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ . Par conséquent,  $Kv$  est un élément de  $H^1(\Omega)$ . ■

**Proposition 5.5** *L'opérateur  $I - K$  est injectif.*

**Démonstration :**

Soit  $w \in L^2(\Omega)$  une fonction qui vérifie

$$w - Kw = 0. \quad (5.26)$$

Par définition, cette fonction  $w$  est la restriction à  $\Omega$  de la solution sortante  $v \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$

$$-\Delta v(\mathbf{x}) - k_0^2 v(\mathbf{x}) = \left(k^2(\mathbf{x}) - k_0^2\right)w(\mathbf{x}), \quad \text{sur } \mathbb{R}^3. \quad (5.27)$$

Comme,  $w = v$  sur  $\Omega$ , cette fonction vérifie

$$-\Delta v(\mathbf{x}) - k^2(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}^3. \quad (5.28)$$

muni des conditions de radiation

$$\begin{cases} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |v(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik_0)v(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{cases} \quad (5.29)$$

**Montrons que**  $v_{\infty}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ . D'après la formule de Green sur la boule de rayon  $R$ , on a

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} \|\nabla v\|^2 - k^2(x)|v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r v(\mathbf{x})\bar{v}(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} \quad (5.30)$$

On peut alors prendre la partie imaginaire de cette expression

$$\begin{cases} 0 = \Im\left(\int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r v(\mathbf{x})\bar{v}(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}\right) \\ = \Im\left(\int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} (\partial_r - ik_0)v(\mathbf{x})\bar{v}(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}\right) + k_0 \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \end{cases} \quad (5.31)$$

Par passage à la limite, et d'après les conditions de radiation et le développement en champ lointain, on a

$$0 = k_0 \int_{S_1} |v_{\infty}(\hat{\mathbf{x}})|^2 d\hat{\mathbf{x}} \quad (5.32)$$

Il suit que  $v_\infty(\widehat{\mathbf{x}}) = 0$ .

**Montrons que**  $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ . Comme  $v \in L^6(\mathbb{R}^3)$ , la fonction  $v$  est  $L^2$  sur toute boule de rayon  $R > 0$ . Au voisinage de l'infini, comme  $v_\infty = 0$ , on a d'après la proposition 4.15

$$|v(\mathbf{x})| = O_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \right) \quad (5.33)$$

Ainsi, la fonction  $v$  est  $L^2$  au voisinage de l'infini. Il suit que  $v \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . D'autre part, cette fonction admet le cadre fonctionnel proposition 4.8,

$$\exp(ik_0\|\mathbf{x}\|)\nabla \left( \exp(-ik_0\|\mathbf{x}\|)v(\mathbf{x}) \right) = \nabla v(\mathbf{x}) - ik_0v(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \in L^2(\mathbb{R}^3). \quad (5.34)$$

Comme  $v \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , il suit que  $ik_0v(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . D'où, on déduit que  $\nabla v \in L^2(\mathbb{R}^3)$ .

**Concluons en montrant que**  $v = 0$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Comme  $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ ,

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla v(\mathbf{x})|^2 - k^2|v(\mathbf{x})|^2 = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \overline{v(\mathbf{x})}(\partial_r - i\alpha)v(\mathbf{x}) + i\alpha|v(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (5.35)$$

On note  $v_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , avec  $\alpha = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} |k(\mathbf{x})|$ , la fonction définie par

$$v_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{v(\mathbf{x})}{\exp(i\alpha\|\mathbf{x}\|)}. \quad (5.36)$$

Il suit de l'identité  $\nabla v_\alpha + i\alpha v_\alpha \vec{e}_r = \exp(-i\alpha\|\mathbf{x}\|)\nabla v$  que

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla v_\alpha + i\alpha v_\alpha \vec{e}_r|^2 - k^2|v_\alpha|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r v_\alpha \overline{v_\alpha} + i\alpha|v_\alpha|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (5.37)$$

Ceci se simplifie en

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla v_\alpha|^2 + i\alpha \left( v_\alpha \overline{\partial_r v_\alpha} - \overline{v_\alpha} \partial_r v_\alpha \right) + (\alpha^2 - k^2)|v_\alpha|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r v_\alpha \overline{v_\alpha} + i\alpha|v_\alpha|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (5.38)$$

En prenant la partie imaginaire, on a

$$0 = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \overline{v_\alpha} \partial_r v_\alpha - v_\alpha \overline{\partial_r v_\alpha} + 2i\alpha|v_\alpha|^2 ds_{\mathbf{x}} \quad (5.39)$$

On déduit alors que

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} i\alpha (\overline{v_\alpha} \partial_r v_\alpha - v_\alpha \overline{\partial_r v_\alpha}) d\mathbf{x} = 2\alpha^2 \int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |v_\alpha|^2 d\mathbf{x} \quad (5.40)$$

et par conséquent

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla v_\alpha|^2 + (3\alpha^2 - k^2) |v_\alpha|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\| = R\}} \partial_r v_\alpha \bar{v}_\alpha + i\alpha |v_\alpha|^2 ds_{\mathbf{x}} \quad (5.41)$$

On peut alors exprimer le membre de droite en fonction de  $w$

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\| < R\}} |\nabla v_\alpha|^2 + (3\alpha^2 - k^2) |v_\alpha|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\| = R\}} (\partial_r w - ik_0 w) \bar{w} + ik_0 |w|^2 ds_{\mathbf{x}} \quad (5.42)$$

On peut alors prendre la partie réelle puis passer à la limite  $R \rightarrow +\infty$  grâce aux conditions de radiation

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_\alpha|^2 + (3\alpha^2 - k^2) |v_\alpha|^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (5.43)$$

Comme  $3\alpha^2 - k^2(\mathbf{x}) \geq 2\alpha^2$ , on a que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_\alpha|^2 + 2\alpha^2 |v_\alpha|^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (5.44)$$

Il suit  $v_\alpha = 0$  et par conséquent  $v = 0$ . Il suit que la restriction  $w$  de  $v$  à  $\Omega$  est identiquement nulle. ■

### 5.3 Equation de Helmholtz à l'extérieur d'un obstacle borné

Dans cette section, on considère le problème de diffraction d'ondes par un obstacle borné  $\Omega'$ . Soit  $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$ , un domaine compact (fermé et borné) de frontière  $\partial\Omega$  régulière. On note  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega'$  sont complémentaire.

L'objet de cette section est de démontrer le théorème

**Théorème 5.6** *Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact dans  $\Omega_\rho$*

$$\Omega_\rho = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \mid \|\mathbf{x}\| \leq \rho \right\} \quad (5.45)$$

*Il existe un unique  $u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$  tel que*

$$\begin{cases} -\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u_k(\mathbf{x}) = 0 & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.46)$$



*muni de la condition de radiation de Sommerfeld*

$$\begin{cases} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik_0)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{cases} \quad (5.47)$$

**Démonstration :**

La première étape consiste à écrire ce problème sous la forme d'une alternative de Fredholm.

**Etape 1. Mise sous la forme d'un problème de Fredholm** La solution du problème de Helmholtz  $u_k$  se décompose sous la forme

$$u_k(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x}) + (1 - \theta(\mathbf{x}))u_k(\mathbf{x}) \quad (5.48)$$

avec  $\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  qui vérifie :

$$\theta(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{pour } \|\mathbf{x}\| \leq \frac{\rho}{2} \quad \text{et} \quad \theta(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{pour } \|\mathbf{x}\| \geq \rho \quad (5.49)$$

La fonction  $\theta u_k$  est la solution sortante du problème de Helmholtz posé dans l'espace libre

$$-(\Delta + k^2)\theta(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) - g_{u_k}(\mathbf{x}) \quad (5.50)$$

avec

$$g_u(\mathbf{x}) = 2\nabla\theta(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x})\Delta\theta(\mathbf{x}) \quad (5.51)$$

Il suit que  $\theta u_k$  peut être exprimé à l'aide de la fonction de Green

$$\theta u_k = G_k * [\theta f - g_{u_k}] \quad \text{avec } G_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|}. \quad (5.52)$$

De même, la restriction à  $\Omega_\rho$  de la fonction  $(1 - \theta)u_k$  est l'unique solution du problème de Laplace-Dirichlet posé en domaine borné

$$\begin{cases} -\Delta[(1 - \theta)u_k] = (1 - \theta)f + g_{u_k} + k^2(1 - \theta)u_k, & \text{dans } \Omega_\rho \\ u_k = 0 & \text{pour } \|\mathbf{x}\| = \rho \\ u_k(\mathbf{x}) = -G_k * [\theta f - g_{u_k}](\mathbf{x}) & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.53)$$

Il suit que  $(1 - \theta)u_k$  est donné par

$$(1 - \theta)u_k = R \left[ G_k * \left[ g_{u_k} - \theta f \right]; (1 - \theta)f + g_{u_k} + k^2(1 - \theta)u_k \right] \quad (5.54)$$

avec  $R : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times L^2(\Omega_\rho) \longrightarrow H^1(\Omega_\rho)$  l'application qui à  $(g, h) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times L^2(\Omega_\rho)$  associe l'unique solution la solution  $v \in H_0^1(\Omega)$  de

$$\begin{cases} -\Delta v = h & \text{dans } \Omega_\rho, \\ v = g & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ v(\mathbf{x}) = 0 & \text{pour } \|\mathbf{x}\| = \rho, \end{cases} \quad (5.55)$$

Il suit de (5.52) et (5.54) l'identité posé sur  $\Omega_\rho$

$$\begin{aligned} u_k &= \left( G_k * \left[ \theta f - g_{u_k} \right] \right) \\ &+ R \left[ G_k * \left[ g_{u_k} - \theta f \right]; (1 - \theta)f + g_{u_k} + k^2(1 - \theta)u_k \right]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Ceci peut se mettre sous la forme d'une alternative de Fredholm

$$u_k + K u_k = F \quad \text{dans } H^1(\Omega_\rho) \quad (5.57)$$

avec  $K : H^1(\Omega_\rho) \longrightarrow H^1(\Omega_\rho)$

$$u \longmapsto K u = \left( G_k * g_u \right) \Big|_{\Omega_\rho} - R \left[ G_k * g_u; g_u + k^2(1 - \theta)u \right] \quad (5.58)$$

et  $F = G_k * \theta f + R \left[ -G_k * \theta f; (1 - \theta)f \right] \in H^1(\Omega_\rho)$ .

**Etape 2. Montrons qu'il existe une unique fonction  $\tilde{u}_k \in H^1(\Omega_\rho)$  solution du problème (5.57).** Il nous suffit de montrer les deux points suivant et d'utiliser l'alternative de Fredholm (annexe A.4)

L'opérateur  $K : H^1(\Omega_\rho) \longrightarrow H^1(\Omega_\rho)$  est compact : D'après la théorie de régularité des solutions des problèmes au Laplacien. la solution du problème (??) est dans  $H^2(\Omega_\rho)$  car la frontière  $\partial\Omega_\rho = \partial\Omega \cup \{\|\mathbf{x}\| = \rho\}$  de  $\Omega_\rho$  est régulière. Il suit que l'image de  $R$  est incluse dans  $H^2(\Omega_\rho)$  qui est un sous-espace compact de  $H^1(\Omega_\rho)$ . Par conséquent, l'opérateur  $R$  est compact.

L'opérateur  $I + K$  est injectif Soit  $\tilde{u}$  une fonction de  $H^1(\Omega_\rho)$  qui vérifie

$$\tilde{u} + G_k * g_{\tilde{u}} \Big|_{\Omega_\rho} - R \left[ G_k * g_{\tilde{u}}; g_{\tilde{u}} + k^2(1 - \theta)\tilde{u} \right] = 0. \quad (5.59)$$

On prolonge  $\tilde{u} \in H^1(\Omega_\rho)$  à tout  $\mathbb{R}^3$  en une fonction  $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$  définie par

$$u = \tilde{u} \quad \text{dans } \Omega_\rho \quad \text{et } u = G_k * g_{\tilde{u}} \quad (5.60)$$

On a la décomposition  $\tilde{u} = u_1|_{\Omega_\rho} + u_2$  avec  $u_1$  la solution sortante de l'équation de Helmholtz

$$-\Delta u_1 - k^2 u_1 = g_{\tilde{u}} \quad (5.61)$$

et  $u_2 \in H^1(\Omega_\rho)$  la solution sortante du problème de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_2 = -g_{\tilde{u}} - k^2(1 - \theta)\tilde{u} \quad \text{dans } \Omega_\rho, \\ u_2 = -u_1 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ u_2 = 0 \quad \text{pour } \|\mathbf{x}\| = \rho. \end{array} \right. \quad (5.62)$$

Il suit que la fonction  $\tilde{u}$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{u} - k^2 \tilde{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\rho, \\ \tilde{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (5.63)$$

Il suit que  $(1 - \theta)\tilde{u}$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta(1 - \theta)\tilde{u} = -g_{\tilde{u}} - k^2(1 - \theta)\tilde{u} \quad \text{dans } \Omega_\rho, \\ (1 - \theta)\tilde{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ (1 - \theta)\tilde{u} = 0 \quad \text{pour } \|\mathbf{x}\| = \rho. \end{array} \right. \quad (5.64)$$

En comparant (5.63) et (5.64), il suit par unicité du problème de Dirichlet Laplace que  $u_2 = (1 - \theta)\tilde{u}$ .

On en déduit que  $u$  est une solution sortante de l'équation de Helmholtz homogène

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) - k^2 u(\mathbf{x}) = 0 & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.65)$$

muni de la condition de radiation de Sommerfeld

$$\begin{cases} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{cases} \quad (5.66)$$

D'autre part, cette fonction est donnée au voisinage de l'infini par champ lointain, il suit donc que  $u$  admet un développement en champ lointain. Montrons que  $u_\infty = 0$ .

D'après la formule de Green appliqué sur le domaine  $\Omega$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2 - k^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &= \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{x}) \bar{u}(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \left( \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{x}) - ik u(\mathbf{x}) \right) \bar{u}(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} + \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5.67)$$

On peut alors prendre la partie imaginaire de cette expression et passer à la limite  $R \rightarrow +\infty$

$$0 = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=1\}} |u_\infty(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} \quad (5.68)$$

Il suit que  $u \in H^1(\Omega)$

■

## 5.4 Le théorème de prolongement unique

### 5.4.1 Inégalité de Carleman locale

Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\bar{O}$  sa fermeture. Soit  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  qui vérifie  $\nabla \Psi \neq 0$  sur  $\bar{O}$ . On note  $\Phi_\beta$ , avec  $\beta > 0$  un paramètre, la fonction

$$\Phi_\beta = \frac{-\exp(\beta\Psi)}{\beta}. \quad (5.69)$$

**Théorème 5.7 (Inégalité de Carleman)** *Il existe des  $C > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\gamma_0 > 0$  tels que pour tout  $\gamma > \gamma_0$  et  $u \in C_0^\infty(O)$*

$$\gamma^3 \|\exp(\gamma\Phi_\beta)u\|_{L^2(O)} + \gamma \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\nabla u\|_{L^2(O)} \leq C \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\Delta u\|_{L^2(O)}. \quad (5.70)$$

## 5.4.2 Le théorème de prolongement unique

**Lemme 5.8** *Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$*

$$\left. \begin{array}{l} u \in C^\infty(B(x_0, 3r)) \\ \Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \text{ dans } B(x_0, 3r) \\ u(x) = 0 \text{ dans } B(x_0, r) \end{array} \right\} \implies u = 0 \text{ dans } B(x_0, 2r) \quad (5.71)$$

**Preuve.** Soit  $\chi$  une fonction de troncature  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui vérifie  $\chi(x) = f(\|x - x_0\|)$ ,  $f(t) = 1$  pour  $t \leq 2r$  et  $f(t) = 0$  pour  $t \geq 3r$ . Soit

$$\begin{aligned} O &= \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq \|x - x_0\| \leq 3r\}, \\ O' &= \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq \|x - x_0\| \leq 2r\}, \\ O'' &= \{x \in \mathbb{R}^n : 2r \leq \|x - x_0\| \leq 3r\}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

On applique l'inégalité de Carleman à  $\chi u$  avec  $\Psi(x) = \frac{\|x - x_0\|^2}{2}$  dont le gradient ne s'annule qu'en 0 hors du support de  $u$ . Il existe des  $C > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\gamma_0 > 0$  tels que pour tout  $\gamma > \gamma_0$  et  $u \in C_0^\infty(O)$

$$\gamma^3 \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\chi u\|_{L^2(O)} + \gamma \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\nabla(\chi u)\|_{L^2(O)} \leq C \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\Delta(\chi u)\|_{L^2(O)}. \quad (5.73)$$

Nous manipulons le second membre afin de faire disparaître les dérivées secondes

$$\begin{aligned} \Delta(\chi u) &= (\Delta\chi)u + 2(\nabla\chi) \cdot (\nabla u) + \chi(\Delta u) \\ &= (\Delta\chi)u + 2(\nabla\chi) \cdot (\nabla u) - k^2\chi u. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Il suit de l'inégalité triangulaire ( $C$  est une constante générique)

$$\begin{aligned} & \gamma^3 \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\chi u\|_{L^2(O)} + \gamma \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\nabla(\chi u)\|_{L^2(O)} \\ & \leq C \|\exp(\gamma\Phi_\beta)(\Delta\chi)u\|_{L^2(O)} + C \|\exp(\gamma\Phi_\beta)(\nabla\chi) \cdot (\nabla u)\|_{L^2(O)} \\ & \quad + C \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\chi u\|_{L^2(O)}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Pour  $\gamma$  suffisamment grand le troisième terme du second membre peut être absorbé par le premier membre de l'inégalité. D'autre part les deux autres termes ont un support inclus dans  $O''$ . On a donc

$$\begin{aligned} & \gamma^3 \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\chi u\|_{L^2(O)} + \gamma \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\nabla(\chi u)\|_{L^2(O)} \\ & \leq C \|\exp(\gamma\Phi_\beta)u\|_{L^2(O'')} + C \|\exp(\gamma\Phi_\beta)(\nabla u)\|_{L^2(O'')}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Comme  $O' \subset O$  et  $\chi u = u$  dans  $O$ , il vient

$$\begin{aligned} & \gamma^3 \|\exp(\gamma\Phi_\beta)u\|_{L^2(O')} + \gamma \|\exp(\gamma\Phi_\beta)\nabla u\|_{L^2(O')} \\ & \leq C \|\exp(\gamma\Phi_\beta)u\|_{L^2(O'')} + C \|\exp(\gamma\Phi_\beta)(\nabla u)\|_{L^2(O'')}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Par définition la fonction  $\Phi_\beta$  vérifie

$$\exp(\gamma\Phi_\beta(x')) \leq \exp(\gamma\Phi_\beta(x'')) \quad \forall x' \in O' \text{ et } x'' \in O''. \quad (5.78)$$

On a donc

$$\gamma^3 \|u\|_{L^2(O')} + \gamma \|\nabla u\|_{L^2(O')} \leq C \|u\|_{L^2(O'')} + C \|\nabla u\|_{L^2(O'')}. \quad (5.79)$$

Il ne nous reste plus qu'à passer à la limite  $\gamma \rightarrow +\infty$  pour obtenir  $u = 0$  dans  $O''$ .

**Lemme 5.9** Soient  $\Omega$  un ouvert connexe et  $O \subset \Omega$  un ouvert. Si  $u \in C^\infty(\Omega)$  vérifie

$$\Delta u + \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad u = 0 \text{ dans } O \quad (5.80)$$

alors  $u = 0$  dans  $\Omega$ .

**Preuve.** On munit  $\Omega$  de la topologie induite par la topologie usuelle. L'ensemble  $F = \text{supp}(u) \cap \Omega$  est un fermé. Son complémentaire  $A = \Omega \setminus F$  est ouvert.

Supposons que la frontière de  $F$  est non vide. Nous considérons un point  $y \in \Omega$  de la frontière de  $F$ . Comme  $\Omega$  est ouvert il existe  $R > 0$  tel que

$$B(y, 3R) \subset \Omega \quad (5.81)$$

D'autre part comme  $y$  n'est pas dans l'intérieur de  $F$  il existe  $x_0 \in A$  tel que

$$x_0 \in B(y, R). \quad (5.82)$$

Enfin,  $A$  étant ouvert, il existe  $r \in [0, R]$  tel que

$$B(x_0, r) \subset A. \quad (5.83)$$

L'ensemble  $A$  étant disjoint de  $F$  qui contient tous les  $x$  tels que  $u(x) \neq 0$ , on a

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, r) \quad (5.84)$$

Soit  $p$  le plus grand entier qui vérifie  $2^p r \leq R$ . Nous pouvons alors appliquer  $p$  fois le lemme 5.8. Il suit que

$$u(x) = 0 \text{ dans } B(x_0, 2^{p+1}r) \supset B(x_0, R). \quad (5.85)$$

Ainsi Comme  $y \in B(x_0, R)$ ,  $u = 0$  dans un voisinage de  $y$  et par conséquent  $y \notin F$ . Ceci est impossible.

La frontière de  $F$  est vide et donc  $F$  est ouvert. L'ensemble  $F \neq \Omega$  est un ouvert et un fermé de  $\Omega$  connexe. Le support de  $u$  est donc vide.

## 5.5 Ondes sortantes, ondes entrantes

# Chapitre 6

## Discrétisation par différences finies

Par souci de simplicité on se limitera dans cette section à l'étude de l'équation des ondes en dimension 1. L'extension aux dimensions supérieures ne pose cependant pas de difficultés particulières. On supposera de plus que le milieu est homogène ( $c = \text{cte}$ ) et infini. On s'intéresse donc au calcul numérique de  $u$  solution de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T] \\ u(x, t = 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ \frac{du}{dt}(x, t = 0) = u^1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

### 6.1 Rappel sur les différences finies

On considère une fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , qu'on suppose suffisamment régulière (au moins de classe  $C^2$ ) et on divise  $\mathbb{R}$  en intervalles de longueur  $h$  (qu'on appelle le pas de discrétisation). On cherche à calculer  $f'$  aux points  $x_j = jh$ . Un premier choix consiste à calculer

$$f'_h(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h} \quad (\text{schéma décentré à droite})$$

ou

$$f'_h(x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1}))}{h} \quad (\text{schéma décentré à gauche}).$$

La différence entre  $f'(x_j)$  et  $f'_h(x_j)$  est appelée erreur de consistance, elle peut être calculée simplement à l'aide de développements de Taylor. Il existe en effet



$\xi_j \in [x_j; x_{j+1}]$  tel que :

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_j),$$

donc

$$f'_h(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h} = f'(x_j) + \frac{h}{2} f''(\xi_j)$$

(on obtient évidemment un résultat similaire pour le schéma décentré à droite). L'erreur de consistance des deux schémas précédents est donc d'ordre un.

Si la fonction  $f$  possède plus de régularité (au moins  $C^3$ ), on peut utiliser un schéma centré, plus précis :

$$f'_h(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2h}.$$

On montre que ce schéma est d'ordre deux en utilisant un développement de Taylor d'ordre plus élevé :

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2} f''(x_j) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_j^+), \quad (\xi_j^+ \in [x_j; x_{j+1}])$$

$$f(x_{j-1}) = f(x_j) - hf'(x_j) + \frac{h^2}{2} f''(x_j) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_j^-), \quad (\xi_j^- \in [x_{j-1}; x_j]).$$

On a alors

$$f'_h(x_j) = f'(x_j) + \frac{h^2}{12} (f^{(3)}(\xi_j^+) + f^{(3)}(\xi_j^-)).$$

Si  $f$  est au moins  $C^4$ , on peut calculer sa dérivée seconde en utilisant un schéma centré d'ordre deux :

$$f''_h(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{h^2}.$$

On vérifie que (exercice) :

$$f''(x_j) = f''_h(x_j) + \frac{h^2}{24} (f^{(4)}(\xi_j^+) + f^{(4)}(\xi_j^-)).$$

avec  $\xi_j^+ \in [x_j; x_{j+1}]$  et  $\xi_j^- \in [x_{j-1}; x_j]$ .

## 6.2 Schéma semi-discrétisé en espace

On approche  $(u(x_j, t))_{j \in \mathbb{Z}}$  par  $(u_{h,j}(t))_{j \in \mathbb{Z}}$ , solution du schéma :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_{h,j}}{dt^2} - c^2 \frac{u_{h,j+1} - 2u_{h,j} + u_{h,j-1}}{h^2} = 0, \\ u_h(0) = u_h^0, \\ \frac{du_h}{dt}(0) = u_h^1. \end{cases} \quad (6.2)$$

Le plus souvent, les conditions initiales seront approchées par  $u_{h,j}^0 = u^0(x_j)$  et  $u_{h,j}^1 = u^1(x_j)$ , mais on peut également choisir par exemple

$$u_j^0 = \int_{x_{j-h/2}}^{x_{j+h/2}} u^0(\xi) d\xi, \text{ et } u_j^1 = \int_{x_{j-h/2}}^{x_{j+h/2}} u^1(\xi) d\xi.$$

$u_h(t)$  n'étant pas une fonction, l'espace  $L^2$  n'est évidemment pas adapté à l'étude de ses propriétés. Nous considérerons l'espace

$$L_h^2 = \{u_h = (u_{h,j})_{j \in \mathbb{Z}} \mid \sum_j |u_{h,j}| < +\infty\}$$

muni de la norme

$$\|u_h\| = h \sum_j |u_{h,j}|$$

et du produit scalaire

$$(u_h, v_h) = h \sum_j u_h \bar{v}_h.$$

et supposons que les conditions initiales sont dans  $L_h^2$ .

Nous introduisons également l'opérateur  $A_h$ , défini par :

$$(A_h u_h)_i = -\frac{u_{h,i+1} - 2u_{h,i} + u_{h,i-1}}{h^2},$$

On vérifie facilement que si  $u_h \in L_h^2$  alors  $A_h u_h \in L_h^2$ .

## 6.3 Existence et unicité de la solution $u_h$

On supposera ici que le milieu est homogène :  $c_j = \text{cste} = c$ . L'existence et l'unicité de  $u_h$  peut être démontrée simplement grâce à la transformée de Fourier discrète :

Soit  $K_h = [-\pi/h; \pi/h]$ , on appelle transformation de Fourier discrète l'opérateur  $\mathcal{F}_h$  défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_h : L_h^2 \mapsto L^2(K_h) \\ u_h \rightarrow \hat{u}_h = \mathcal{F}_h(u_h) \\ \hat{u}_h(k) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_j u_{h,j} e^{-ikx_j} \end{array} \right. \quad (6.3)$$

( $\hat{u}_h(k)$  est la transformée discrète de  $u_h$ ). Rappelons que  $\mathcal{F}_h$  est un isomorphisme et que

$$u_{h,j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_h} \hat{u}_h(k) e^{ikx_j} dk.$$

On vérifie facilement que

$$\mathcal{F}_h(A_h u_h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} \hat{u}_h.$$

En effet :

$$\mathcal{F}_h(A_h u_h) = -\frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \sum_j (u_{h,j+1} - 2u_{h,j} + u_{h,j-1}) e^{-ikx_j},$$

de plus :

$$\sum_j u_{h,j+1} e^{-ikx_j} = \sum_j u_{h,j} e^{-ikx_{j-1}} \text{ et } \sum_j u_{h,j-1} e^{-ikx_j} = \sum_j u_{h,j} e^{-ikx_{j+1}},$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h(A_h u_h) &= -\frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \sum_j u_{h,j} (e^{-ikx_{j+1}} - 2e^{-ikx_j} + e^{-ikx_{j-1}}) \\ &= -\frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \sum_j u_{h,j} e^{-ikx_j} (e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}) \\ &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j h u_{h,j} e^{-ikx_j}. \end{aligned}$$

Si  $u_h$  est solution de (B.1),  $\hat{u}_h$  est donc solution de :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{u}_h}{dt^2} + \frac{4c^2}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} \hat{u}_h = 0, \\ \hat{u}_{h,j}(0) = \hat{u}_j^0, \\ \frac{d\hat{u}_{h,j}}{dt}(0) = \hat{u}_j^1. \end{cases} \quad (6.4)$$

C'est une équation différentielle ordinaire qui possède une et une seule solution. Cette solution s'écrit :

$$\hat{u}_h(k, t) = \hat{u}_h^0 \cos(\omega_h t) + \frac{\hat{u}_h^1}{\omega_h} \sin(\omega_h t), \text{ avec } \omega_h^2 = \frac{4c^2}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}.$$

Nous avons démontré l'unicité de la solution de (B.1), pour pouvoir démontrer son existence, il nous reste à vérifier que  $\hat{u}_h$  est bien dans  $L^2(K_h)$ . Pour cela nous utiliserons l'inégalité  $|\sin(\omega_h t)| \leq \omega_h t$  :

$$\|\hat{u}_h(k, t)\| \leq \|\hat{u}_h^0\| + t\|\hat{u}_h^1\|.$$

Les conditions initiales étant supposées dans  $L_h^2$ , leur transformée de Fourier discrète est dans  $L^2(K_h)$  et  $\|\hat{u}_h(k, t)\| \leq \infty$ .  $\hat{u}_h$  est donc bien dans  $L^2(K_h)$ . Nous pouvons alors utiliser le fait que  $\mathcal{F}_h$  est un isomorphisme pour vérifier que  $u_h$  est dans  $L_h^2$ .

### 6.3.1 Stabilité et estimation de la solution

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude du comportement de  $u_h$  au cours du temps et en particulier à sa stabilité.

**Définition 6.1**  $u_h$  sera dite solution stable de (B.1) s'il existe  $C$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  indépendants de  $t$  tels que :

$$\|u_h(t)\| \leq C(1 + t^\alpha)$$

(ce qui revient à dire que  $u_h$  ne croît pas exponentiellement vite avec le temps).

Nous supposons que les conditions initiales discrètes sont telles que

$$\|u_h^0\| \leq C\|u^0\| \text{ et } \|u_h^1\| \leq C\|u^1\|, \forall h$$

#### Par la transformation de Fourier discrète

Cette démonstration n'est valable que pour  $c$  constante et pour un milieu infini.  $\mathcal{F}_h$  étant une isométrie, on a

$$\|u_h(k, t)\| = \|\hat{u}_h(k, t)\| \leq \|\hat{u}_h^0\| + t\|\hat{u}_h^1\| = \|u_h^0\| + t\|u_h^1\| \leq C\|u^0\| + Ct\|u^1\|.$$

### Par technique d'énergie

On multiplie la première équation de (B.1) par  $\frac{du_h}{dt}$ , pour obtenir :

$$\left( \frac{d^2 u_h}{dt^2}, \frac{du_h}{dt} \right) + c^2 \left( A_h u_h, \frac{du_h}{dt} \right) = 0,$$

on vérifie que (exercice) :

$$(A_h u_h, v_h) = \sum_j \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \frac{v_{j+1} - v_j}{h}$$

et on pose  $a_h(u_h, v_h) = (A_h u_h, v_h)$ .  $a_h$  est une forme bilinéaire symétrique et positive. On a donc :

$$\left( \frac{d^2 u_h}{dt^2}, \frac{du_h}{dt} \right) + c^2 a_h \left( u_h, \frac{du_h}{dt} \right) = 0.$$

De plus

$$\left( \frac{d^2 u_h}{dt^2}, \frac{du_h}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{du_h}{dt} \right\|^2 \text{ et } a_h \left( u_h, \frac{du_h}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a_h(u_h, u_h).$$

On a donc

$$\frac{dE_h}{dt} = 0, \text{ avec } E_h(t) = \frac{1}{2} \left( \left\| \frac{du_h}{dt} \right\|^2 + a_h(u_h, u_h) \right).$$

La quantité  $E_h$  est positive et est appelée "énergie". Comme elle est constante, on a :

$$E_h(t) = E_h(0) = \frac{1}{2} \left( \left\| \frac{du_h}{dt}(0) \right\|^2 + a_h(u_h(0), u_h(0)) \right) = \frac{1}{2} \left( \|u_h^1\|^2 + a_h(u_h^0, u_h^0) \right).$$

On en déduit (en utilisant la positivité de  $a_h(u_h, v_h)$ ) que

$$\left\| \frac{du_h}{dt} \right\|^2 \leq E_h(0).$$

Cette inégalité ne nous donne qu'une borne de la dérivée de  $u_h$ . Pour obtenir une borne de  $u_h$ , nous utiliserons :

$$u_h(t) = u_h(0) + \int_0^t \frac{du_h}{dt}(s) ds$$

soit

$$\|u_h(t)\| \leq \|u_h(0)\| + \left\| \int_0^t \frac{du_h}{dt}(s) ds \right\|.$$

On vérifie ensuite que

$$\left\| \int_0^t \frac{du_h}{dt}(s) ds \right\| \leq \int_0^t \left\| \frac{du_h}{dt}(s) \right\| ds \leq \int_0^t \sqrt{E_h(0)} ds \leq t\sqrt{E_h(0)}$$

donc

$$\|u_h\| \leq C\|u_h^0\| + Ct\sqrt{E_h(0)}.$$

Pour borner  $\|u_h\|$  par une constante indépendante de  $h$ , il nous faut une hypothèse supplémentaire sur les conditions initiales : nous supposons qu'elles sont telles que

$$a_h(u_h^0, u_h^0) \leq Ca(u^0, u^0) = C \int_{\mathbb{R}} \nabla u^0 \cdot \nabla u^0.$$

Comme  $\|u_h^0\| \leq C\|u_0\|$  et  $\|u_h^1\| \leq C\|u_1\|$ , on a

$$\|u_h\| \leq C\|u^0\| + Ct\sqrt{E(0)}.$$

### 6.3.2 Convergence du schéma semi-discrétisé

On note  $\bar{u}_h$  la fonction de  $L_h^2$  définie par

$$\bar{u}_{h,j}(t) = u_j(x_j, t).$$

On cherche à évaluer l'erreur d'approximation du schéma :

$$e_h(t) = u_h(t) - \bar{u}_h(t) \in L_h^2$$

**Théorème 6.2** *Si les conditions initiales sont approchées par  $u_{h,j}^0 = u^0(x_j)$  et  $u_{h,j}^1 = u^1(x_j)$ , alors :*

$$\|e_h(t)\| \leq Cth^2 \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}))}$$

**Démonstration :**

1. On montre que  $\bar{u}_h$  est solution de

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{u}_h}{dt^2} + c^2 A_h \bar{u}_h = c^2 \varepsilon_h, \\ \bar{u}_{h,j}(0) = u^0(x_j), \\ \frac{d\bar{u}_{h,j}}{dt}(0) = u^1(x_j). \end{cases} \quad (6.5)$$

avec

$$\varepsilon_{h,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\bar{u}_{h,j+1} - 2\bar{u}_{h,j} + \bar{u}_{h,j-1}}{h^2},$$

l'erreur de consistance du schéma.

**Démonstration :**

Par définition  $\bar{u}_h$  vérifie

$$\frac{d^2 \bar{u}_{h,j}}{dt^2}(t) = \frac{d^2 u}{dt^2}(x_j, t) = c^2 \frac{d^2 u}{dx^2}(x_j, t),$$

donc

$$\frac{d^2 \bar{u}_{h,j}}{dt^2}(t) + c^2 (A_h \bar{u}_h)_i = c^2 \frac{d^2 u}{dx^2}(x_j, t) + c^2 (A_h \bar{u}_h)_i = c^2 \varepsilon_{h,i}.$$

La démonstration des deux dernières égalités de (B.5) est évidente, d'après la définition de  $\bar{u}_h$ . ■

2. On vérifie ensuite que l'erreur est solution du schéma :

$$\begin{cases} \frac{d^2 e_h}{dt^2} + c^2 A_h e_h = c^2 \varepsilon_h, \\ e_h(0) = \bar{u}_h^0 - u_h^0, \\ \frac{de_h}{dt}(0) = \bar{u}_h^1 - u_h^1. \end{cases} \quad (6.6)$$

Il suffit pour cela de soustraire (B.4) à (B.1).

3. On montre que  $\sqrt{E_h(t)} \leq \sqrt{E_h(0)} + C \int_0^t \|\varepsilon(s)\| ds$ , avec

$$E_h(t) = \frac{1}{2} \left( \left\| \frac{de_h}{dt} \right\|^2 + a_h(e_h, e_h) \right)$$

**Démonstration :**

On multiplie la première équation de (6.6) par  $\frac{de_h}{dt}$  pour obtenir

$$\frac{dE_h}{dt} = \left( \varepsilon_h, \frac{de_h}{dt} \right) \leq \|\varepsilon_h\| \left\| \frac{de_h}{dt} \right\| \leq \|\varepsilon_h\| C \sqrt{E_h(t)}.$$

De plus  $\frac{dE_h}{dt} = 2\sqrt{E_h(t)} \frac{d\sqrt{E_h}}{dt}$  :

$$2 \frac{d\sqrt{E_h}}{dt} \leq C \|\varepsilon_h\| \implies \sqrt{E_h(t)} \leq \sqrt{E_h(0)} + C \int_0^t \|\varepsilon(s)\| ds.$$

■

4. On en déduit que :

$$\|e_h(t)\| \leq \|e_h(0)\| + Ct\sqrt{E_h(0)} + Ct \int_0^t \|\varepsilon(s)\| ds$$

**Démonstration :**

On a

$$e_h(t) = e_h(0) + \int_0^t \frac{de_h}{dt}(s) ds$$

et

$$\|e_h(t)\| \leq \|e_h(0)\| + \left\| \int_0^t \frac{de_h}{dt}(s) ds \right\| \implies \|e_h(t)\| \leq \|e_h(0)\| + \int_0^t \left\| \frac{de_h}{dt}(s) \right\| ds.$$

On a également

$$\left\| \frac{de_h}{dt}(s) \right\| \leq \sqrt{E_h(s)} \leq \sqrt{E_h(0)} + C \int_0^s \|\varepsilon(\tau)\| d\tau,$$

soit

$$\left\| \frac{de_h}{dt}(s) \right\| \leq \sqrt{E_h(0)} + C \int_0^s \|\varepsilon(\tau)\| d\tau, \quad \forall s \leq t$$

et

$$\|e_h(t)\| \leq \|e_h(0)\| + Ct\sqrt{E_h(0)} + Ct \int_0^t \|\varepsilon(s)\| ds.$$

■



5. Il reste ensuite à établir que :

$$\int_0^t \|\varepsilon_h(s)\| ds \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{L^1(0,t;L^2(\mathbb{R}))}.$$

**Démonstration :**

En utilisant en développement de Taylor avec reste intégral on vérifie que :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_{h,j+1}(t) - 2\bar{u}_{h,j}(t) + \bar{u}_{h,j-1}(t)}{h^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{1}{6h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1} - \xi)^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{6h^2} \int_{x_j}^{x_{j-1}} (x_{j-1} - \xi)^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) d\xi \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{h,j}(t)| &\leq \frac{1}{6h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |x_{j+1} - \xi|^3 \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) \right| d\xi + \frac{1}{6h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |x_{j-1} - \xi|^3 \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) \right| d\xi \\ &\leq \frac{h}{6} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) \right| d\xi \end{aligned}$$

puis, par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{h,j}(t)| &\leq \frac{h}{6} \sqrt{\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} d\xi} \sqrt{\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) \right|^2 d\xi} \\ &\leq \frac{h^{\frac{3}{2}}}{6} \sqrt{\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) \right|^2 d\xi} \end{aligned}$$

Par définition de la norme  $L_h^2$  :

$$\|\varepsilon_h\|^2(t) = h \sum_j |\varepsilon_{h,j}(t)|^2 \leq \sum_j \frac{h^4}{6} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) \right|^2 d\xi \leq Ch^4 \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

On en déduit facilement l'inégalité annoncée. ■

6. On a donc :

$$\|e_h(t)\| \leq \|e_h(0)\| + Ct\sqrt{E_h(0)} + Cth^2 \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{L^1(0,t;L^2(\mathbb{R}))}.$$

D'après les hypothèses sur les conditions initiales on vérifie que  $\|e_h(0)\| = 0$ ,  $\left\| \frac{de_h}{dt}(0) \right\| = 0$  et  $\sqrt{E_h(0)} = 0$ . ■

# Chapitre 7

## Discrétisation par éléments finis

Les solutions des équations d'ondes que nous avons étudiées aux chapitres précédents appartiennent à des espaces de dimension infinie, en espace et en temps. Pour pouvoir simuler numériquement des phénomènes de propagation d'ondes dans des milieux complexes, il est nécessaire d'approcher ces solutions par des éléments d'ensemble fini car un ordinateur ne peut faire des calculs que sur un nombre fini d'inconnues. De nombreuses techniques sont à notre disposition pour réaliser cette approximation. Parmi elles, les plus fréquemment utilisées sont les méthodes de Différences Finies, les méthodes d'Éléments Finis, les méthodes de Volume Finis et les méthodes de Galerkin Discontinu (qui sont une généralisation des méthodes de Volumes Finis). Nous nous intéressons dans ce chapitre à la discrétisation en espace par des méthodes d'éléments finis, le cas de la discrétisation en temps (par une méthode de différences finies) sera traité au chapitre suivant.

Nous considérerons ici l'équation des ondes acoustiques dans un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d=1,2$  ou  $3$ ) de frontière régulière  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .  $\Gamma_1$  représente un obstacle ou un bord réfléchissant, modélisé par une condition de Neuman.  $\Gamma_2$  est une frontière artificielle utilisée pour simuler un espace infini, modélisé par une condition de Sommerfeld. On peut éventuellement avoir  $\Gamma_1 = \emptyset$  ou  $\Gamma_2 = \emptyset$  (voir Figs. 7.1, 7.2 et 7.3). Nous avons choisi de considérer une condition de Neumann homogène sur  $\Gamma_1$  mais les résultats présentés ci-dessous peuvent être généralisés (avec quelques adaptations) au cas de conditions de Dirichlet ou à des conditions non homogènes.

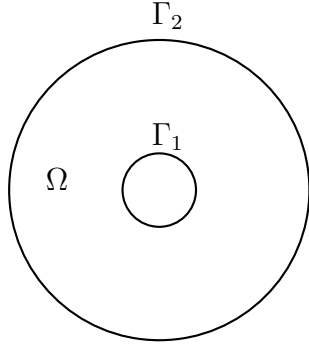


FIGURE 7.1 – Diffraction par un obstacle circulaire.

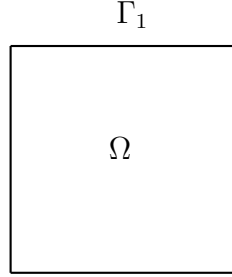


FIGURE 7.2 – Propagation dans un domaine borné ( $\Gamma_2 = \emptyset$ ).

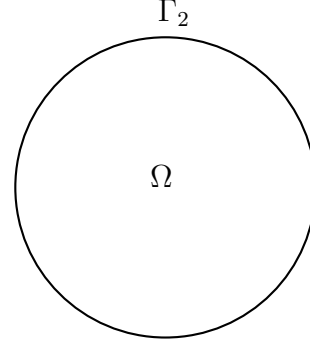


FIGURE 7.3 – Propagation dans un domaine infini ( $\Gamma_1 = \emptyset$ ).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho(x)} \nabla u(x, t) \right) = f(x, t), & x \in \Omega, t \in ]0, T[ \\ \nabla u(x, t) \cdot \mathbf{n} = 0, & x, t \in ]0, T[ \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c(x) \nabla u(x, t) \cdot \mathbf{n} = 0, & x \in \Gamma_2, t \in ]0, T[ \\ u(x, t = 0) = u^0(x), \quad \frac{du}{dt}(x, t = 0) = u^1(x), & x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (7.1)$$

Les paramètres physiques  $\mu$  et  $\rho$  sont supposés bornés, strictement positifs et appartiennent à  $L^\infty(\Omega)$ . En pratique, on les suppose en général constants (ou polynomiaux) par morceaux et le maillage est alors construit de telle sorte que ces paramètres soient constants par éléments. Les données initiales sont telles que  $u_0 \in H_1(\Omega)$  et  $u_1 \in L^2(\Omega)$  et la source telle que  $f \in C^0(]0, T[, L^2(\Omega))$ .

Le problème (7.1) admet alors une unique solution  $u \in C^0(]0, T[, H^1(\Omega) \cap C^2(]0, T[, L^2(\Omega))$  qui est également solution du problème variationnel

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} u v + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} u v + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad (7.2)$$

pour  $v(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$ , avec les conditions initiales

$$u(x, t = 0) = u^0(x), \quad \frac{du}{dt}(x, t = 0) = u^1(x), \quad x \in \Omega.$$

Pour pouvoir calculer une solution approchée de ce problème, posé dans l'espace de dimension infinie  $H^1(\Omega)$ , nous allons maintenant nous placer dans un espace de dimension finie et dériver une formulation variationnelle approchée.

## 7.1 Formulation variationnelle approchée (méthode de Galerkin)

Nous noterons  $V_h$  l'espace d'approximation utilisé. Cet espace est obtenu à partir d'un maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  et  $h$  désigne le diamètre du plus petit élément de  $\mathcal{T}_h$  (voir annexe B). En général, la dimension  $N$  de  $V_h$  vérifie  $N \approx C/h^d$ . Bien évidemment, l'espace  $V_h$  doit se rapprocher de l'espace original  $V = H^1(\Omega)$  quand  $h$  diminue. Dans le cas des éléments finis classiques (méthode de Galerkin continu),  $V_h$  est un sous-ensemble de  $V = H^1(\Omega)$  et la propriété "  $V_h$  se rapproche de  $V$  quand  $h$  diminue " se traduit par

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0, \quad v \in V. \quad (7.3)$$

D'autres méthodes, comme les méthodes de Galerkin discontinues, ont la particularité d'utiliser des espaces  $V_h$  non inclus dans  $V$ . Il n'est alors plus possible d'utiliser la norme  $\|v - v_h\|_V$  et la propriété précédente se réécrit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{V+V_h} = 0, \quad v \in V.$$

Nous supposons ici que  $V_h \subset V$  et nous cherchons  $u_h \in V_h$ , solution de la formulation variationnelle approchée de (7.2)

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} u_h v_h + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} u_h v_h + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h, \quad \forall v_h \in V_h \quad (7.4)$$

avec les conditions initiales :

$$u_h(x, t = 0) = u_h^0(x), \quad \frac{du_h}{dt}(x, t = 0) = u_h^1(x), \quad x \in \Omega.$$

Les données initiales  $u_h^0$  et  $u_h^1$  sont des approximations dans  $V_h$  de  $u_0$  et de  $u_1$ . Nous précisons par la suite les conditions que ces approximations doivent vérifier.

Il nous faut maintenant répondre aux trois questions suivantes.

1. Le problème (7.4) admet-il une unique solution ?
2. Si oui, cette solution est-elle stable et peut-on contrôler son comportement au cours du temps en fonction des données initiale ?
3. Cette solution converge-t-elle vers la solution (7.1) et peut-on estimer cette convergence en fonction de  $h$  ?

### 7.1.1 Existence et unicité de la solution

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de (7.4), le plus simple est de réécrire ce système sous forme matricielle. Comme  $V_h$  est de dimension finie  $N$  on peut utiliser  $(\phi_{h,i})_{1 \leq i \leq N}$ , une de ses bases et écrire  $u_h$  sous la forme

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^N U_{h,i}(t) \phi_{h,i}.$$

Le problème (7.4) peut alors s'écrire sous la forme d'un système linéaire :

$$\begin{cases} M_h \frac{d^2 U_h(t)}{dt^2} + C_h \frac{dU_h(t)}{dt} + K_h U_h(t) = F_h \\ U_h(0) = U_h^0, \quad \frac{dU_h}{dt}(0) = U_h^1. \end{cases} \quad (7.5)$$

avec  $U_h(t)$  le vecteur de composantes  $U_{h,i}(t)$ ,  $U_h^0$  et  $U_h^1$  les vecteurs des composantes de  $u_h^0$  et  $u_h^1$  dans la base  $\phi_h$  et

$$M_{h,i,j} = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \phi_{h,i} \phi_{h,j}, \quad C_{h,i,j} = \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} \phi_{h,i} \phi_{h,j}, \quad K_{h,i,j} = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \phi_{h,i} \cdot \nabla \phi_{h,j} \text{ et } F_{h,i} = \int_{\Omega} f \phi_{h,i}.$$

**Proposition 7.1**  $M_h$  est symétrique définie positive,  $C_h$  et  $K_h$  sont symétriques positives.

**Démonstration :**

La symétrie est évidente. Il reste à montrer que  $U_h^t M_h U_h > 0$ ,  $U_h^t C_h U_h \geq 0$  et  $U_h^t K_h U_h \geq 0$  pour tout  $U_h$  non nul. On a

$$(M_h U_h)_i = \sum_{j=1}^N M_{h,i,j} U_{h,j} = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \phi_{h,i} \phi_{h,j} U_{h,j} = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \phi_{h,i} u_h,$$

donc

$$U_h^t M_h U_h = \sum_{i=1}^N U_{h,i} (M_h U_h)_i = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} U_{h,i} \phi_{h,i} u_h = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} u_h^2 > 0$$

si  $u_h$  (donc  $U_h$ ) est non nul.

On montre de même que :

$$U_h^t C_h U_h = \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} u_h^2 \geq 0 \text{ et } U_h^t K_h U_h = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \|\nabla u_h\|^2 \geq 0.$$

■

La matrice  $M_h$  étant symétrique définie positive, elle est inversible et le système (7.5) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d^2 U_h(t)}{dt^2} + M_h^{-1} C_h \frac{dU_h(t)}{dt} + M_h^{-1} K_h U_h(t) = M_h^{-1} F_h \\ U_h(0) = U_h^0, \quad \frac{dU_h}{dt}(0) = U_h^1. \end{cases} \quad (7.6)$$

En posant  $Y_h(t) = \frac{dU_h(t)}{dt}$  on obtient le système différentiel ordinaire du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{dY_h(t)}{dt} + M_h^{-1} C_h Y_h(t) + M_h^{-1} K_h U_h(t) = M_h^{-1} F_h \\ Y_h(t) = \frac{dU_h(t)}{dt} \\ U_h(0) = U_h^0, \quad Y_h(0) = U_h^1, \end{cases} \quad (7.7)$$

qui admet une et une seule solution.

## 7.1.2 Stabilité et estimation de la solution

Pour simplifier la présentation, nous supposons dans cette section que  $f = 0$ . Nous procéderons en trois étapes :

1. On montre la décroissance en temps d'une énergie.
2. On en déduit que la norme  $L^2$  de la dérivée en temps de la solution est bornée par la norme des conditions initiales.
3. On conclut que la norme  $L^2$  de la solution est bornée par une fonction linéaire en temps et par la norme des conditions initiales.

1. En choisissant  $v_h = \frac{du_h(t)}{dt}$  dans (7.2), on obtient (exercice)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{du_h}{dt}(t) \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla u_h(t) \right\|^2 = - \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\sqrt{\rho\mu}} \left( \frac{du_h}{dt}(t) \right)^2 \leq 0.$$

L'énergie

$$E_h(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{du_h}{dt}(t) \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla u_h(t) \right\|^2$$

vérifie donc

$$\frac{dE_h(t)}{dt} \leq 0.$$

2. On en déduit

$$\left\| \frac{du_h}{dt}(t) \right\|^2 \leq CE_h(t) \leq CE_h(0) \leq C \left( \|u_h^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right).$$

Pour obtenir une borne indépendante de  $h$ , on supposera que les conditions initiales sont choisies de telle sorte que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h^0 - u^0\|_V \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h^1 - u^1\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors, pour  $h$  suffisamment petit,

$$\|u^0 - u_h^0\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u^0\|_{H^1(\Omega)} \text{ et } \|u^1 - u_h^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^1\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc

$$\|u_h^0\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u^0 - u_h^0\|_{H^1(\Omega)} + \|u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u^0\|_{H^1(\Omega)}.$$

On montre de même que

$$\|u_h^1\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u^1\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalement

$$\left\| \frac{du_h}{dt}(t) \right\|^2 \leq C \left( \|u^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right).$$

3. Cette inégalité ne nous donne qu'une borne de la dérivée de  $u_h$ . Pour obtenir une borne de  $u_h$ , nous utiliserons :

$$u_h(t) = u_h(0) + \int_0^t \frac{du_h}{dt}(s) ds$$

soit

$$\|u_h(t)\| \leq \|u_h(0)\| + \left\| \int_0^t \frac{du_h}{dt}(s) ds \right\|.$$

On vérifie ensuite que

$$\left\| \int_0^t \frac{du_h}{dt}(s) ds \right\| \leq \int_0^t \left\| \frac{du_h}{dt}(s) \right\| ds \leq \int_0^t \sqrt{E_h(0)} ds \leq t\sqrt{E_h(0)}$$

donc

$$\|u_h\| \leq C\|u_h^0\| + Ct\sqrt{E_h(0)}.$$

Pour borner  $\|u_h\|$  par une constante indépendante de  $h$ , il nous faut une hypothèse supplémentaire sur les conditions initiales : nous supposons qu'elles sont telles que

$$a_h(u_h^0, u_h^0) \leq Ca(u^0, u^0) = C \int_{\mathbb{R}} \nabla u^0 \cdot \nabla u^0.$$

Comme  $\|u_h^0\| \leq C\|u_0\|$  et  $\|u_h^1\| \leq C\|u_1\|$ , on a

$$\|u_h\| \leq C\|u^0\| + Ct\sqrt{E(0)}.$$

$$\|u_h(t)\|^2 \leq C\|u^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + Ct\sqrt{\|u^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^0\|_{H^1(\Omega)}^2}.$$

### 7.1.3 Convergence du schéma semi-discrétisé

On supposera ici que  $\Gamma_2 = \emptyset$  et que les conditions initiales et la fonction source sont telles que  $u \in C^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $u_h \in C^2(0, T; V_h)$ .

Comme toute fonction  $v_h \in V_h$  est aussi dans  $H^1(\Omega)$ , on a, d'après (7.2) :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} uv_h + \int_{\Omega} c^2 \nabla u \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h, \quad \forall v_h \in V_h$$

Il est donc évident que :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} (u - u_h)v_h + \int_{\Omega} c^2 \nabla (u - u_h) \cdot \nabla v_h = 0, \quad \forall v_h \in V_h \quad (7.8)$$

avec les conditions initiales :

$$(u - u_h)(x, t = 0) = (u^0 - u_h^0)(x), \quad \frac{d(u - u_h)}{dt}(x, t = 0) = (u^1 - u_h^1)(x), \quad x \in \Omega.$$

Si nous pouvions choisir  $v_h = u - u_h$ , nous aurions presque immédiatement une estimation de l'erreur, malheureusement,  $u - u_h \notin V_h$ . Nous allons donc utiliser une fonction intermédiaire  $w_h \in V_h$  bien choisie et étudier séparément les normes  $\|u - w_h\|$  et  $\|w_h - u_h\|$ . Nous concluons à l'aide de l'inégalité

$$\|u - u_h\| \leq \|u - w_h\| + \|w_h - u_h\|.$$

1. Choix de la fonction  $w_h$ .

Nous posons  $w_h = P_h u$ , où  $P_h$  est l'opérateur défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_h : V \rightarrow V_h \\ u \mapsto P_h u, \text{ tel que } a(P_h u - u, v) = 0, \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (7.9)$$



avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u v + \int_{\Omega} c^2 \nabla u \cdot \nabla v$$

L'existence et l'unicité de  $P_u$  sont garanties par la coercivité et la continuité de  $a$ . Si on avait considéré des conditions aux limites de Dirichlet sur la frontière  $\Gamma$  on aurait pu choisir

$$a(u, v) = \int_{\Omega} c^2 \nabla u \cdot \nabla v.$$

## 2. Estimation de $\|P_h u - u\|$

**Lemme 7.2** *On a*

$$\|P_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

**Démonstration :**

Comme  $P_h \in V_h$ , on a  $a(P_h u - u, P_h u) = a(P_h u - u, v_h) = 0$ , donc  $a(P_h u - u, P_h u - u) = a(P_h u - u, v_h - u)$ . En utilisant la continuité et la coercivité de  $a$ , on montre que :

$$C_1 \|P_h u - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(P_h u - u, P_h u - u) = a(P_h u - u, v_h - u) \leq C_2 \|P_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \|v_h - u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Comme la seconde inégalité est vraie pour tout  $v_h$ , on a

$$\|P_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_2}{C_1} \inf_{v \in V_h} \|v_h - u\|_{H^1(\Omega)}$$

■

Dans le cas particulier des éléments finis  $P^k$ , on obtient une estimation plus précise en utilisant le lemme suivant (admis).

**Lemme 7.3** *Si l'espace  $V_h$  est construit par une méthode d'éléments finis  $P_k$ , on a*

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v_h - u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k |u|_{k+1, \Omega}$$

et

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v_h - u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} |u|_{k+1, \Omega}$$

on a alors :

$$\|P_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k |u|_{k+1, \Omega}.$$

On obtient des estimations similaires sur les dérivées première et seconde par rapport au temps en remarquant que  $P_h(\partial_t u) = \partial_t P_h(u)$ .

Pour obtenir une estimation en norme  $L^2$  nous utiliserons les lemmes suivants :

**Lemme 7.4** (Aubin-Nitsche). Pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\|P_h u - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|P_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \sup_{g \in L^2(\Omega)} \left( \frac{1}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} \inf_{v \in V_h} \|v_h - \phi_g\|_{H^1(\Omega)} \right)$$

où  $\phi_g$  est solution du problème adjoint défini par :

Trouver  $\phi_g \in V$  tel que

$$a(v, \phi_g) = (g, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

**Démonstration :**

Par définition de la norme dans  $L^2(\Omega)$ ,

$$\|P_h u - u\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{|(g, P_h u - u)_{L^2(\Omega)}|}{\|g\|_{L^2(\Omega)}},$$

de plus

$$(g, P_h u - u) = a(P_h u - u, \phi_g) = a(P_h u - u, \phi_g - v_h) \leq C \|P_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \|\phi_g - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

■

**Définition 7.5** Le problème adjoint est dit régulier si, pour tout  $g \in L^2(\Omega)$ ,  $\phi_g \in H^2(\Omega)$  et s'il existe  $C > 0$  tel que

$$\|\phi_g\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

**Lemme 7.6** Si le problème adjoint est régulier, on a, pour tout  $u \in H^1(\Omega)$

$$\|P_h u - u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|P_h u - u\|_{H^1(\Omega)}.$$

**Démonstration :**

D'après le lemme 7.3, comme  $\phi_g \in H^2(\Omega)$ , on a

$$\inf_{v \in V_h} \|v_h - \phi_g\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch |\phi_g|_{2,\Omega} \leq Ch \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant 7.4, on obtient le résultat annoncé. ■

3. Estimation de  $\|u_h - P_h u\|$  En remplaçant  $u - u_h$  par  $u - P_h u + P_h u - u_h$  dans (7.8), on obtient :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} (P_h u - u_h) v_h + \int_{\Omega} c^2 \nabla(P_h u - u_h) \cdot \nabla v_h = \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} (u - P_h u) v_h + \int_{\Omega} c^2 \nabla(u - P_h u) \cdot \nabla v_h.$$

Soit, par définition de  $P_h$

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} (P_h u - u_h) v_h + \int_{\Omega} c^2 \nabla(P_h u - u_h) \cdot \nabla v_h = \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} (P_h u - u) v_h + \int_{\Omega} (P_h u - u) v_h.$$

On choisit ensuite  $v_h = \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \|c \nabla(P_h u - u_h)\|^2 = \\ & \int_{\Omega} \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2} \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} + \int_{\Omega} (P_h u - u) \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Le terme de gauche est en fait la dérivée en temps des normes  $\left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$  et  $\|c \nabla(P_h u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2$ , mais pas de la norme  $L^2$  (ni *a fortiori* de la norme  $H^1$ ) de  $P_h u - u_h$ . Nous allons donc ajouter la dérivée en temps de  $\|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2$  de chaque côté de l'égalité<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|c \nabla(P_h u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq \\ & \int_{\Omega} \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2} \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} + \int_{\Omega} (P_h u - u) \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Nous majorons maintenant les trois termes du second membre de cette équation :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2} \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} & \leq \left\| \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \frac{1}{2} \left[ \left\| \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]; \\ - \int_{\Omega} (P_h u - u) \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} & \leq \|P_h u - u\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \frac{1}{2} \left[ \|P_h u - u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]; \end{aligned}$$

---

1. Si nous avons considéré des conditions de Dirichlet, il aurait suffi d'utiliser l'inégalité de Poincaré.

$$\begin{aligned}
- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (P_h u - u_h) \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \\
&\leq \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2} \left[ \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right];
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|c \nabla(P_h u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] &\leq \\
\frac{1}{2} \left[ 3 \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|P_h u - u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].
\end{aligned}$$

En posant

$$E(t) = \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|c \nabla(P_h u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

on vérifie que

$$\frac{dE}{dt} \leq C \left[ E(t) + \|P_h u - u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

En intégrant cette inégalité par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq E(0) + C \int_0^t E(s) ds + C \int_0^t \left[ \|(P_h u - u)(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] ds \\
&\leq C \int_0^t E(s) ds + E(0) + C \int_0^T \left[ \|(P_h u - u)(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] ds.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme de Gronwall :

$$E(t) \leq \left( E(0) + C \int_0^T \left[ \|(P_h u - u)(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] ds \right) e^{Ct}.$$

D'après les résultats obtenus précédemment :

$$\int_0^T \left[ \|(P_h u - u)(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2(P_h u - u)}{\partial t^2}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] ds \leq Ch^{2k+2} |u|_{k+1, \Omega}$$

donc

$$E(t) \leq CE(0) + Ch^{2k+2}|u|_{k+1,\Omega}.$$

Nous supposons que les conditions initiales sont approchées de telle sorte que  $E(0) \leq Ch^{2k+2}$ , alors  $E(t) \leq Ch^{2k+2}$  et

$$\begin{aligned} - & \left\| \frac{\partial(P_h u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \\ - & \|P_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \\ - & \|P_h u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \end{aligned}$$

4. Estimation de  $\|u - u_h\|$ . On déduit des résultats précédents que

$$\begin{aligned} - & \left\| \frac{\partial(u - u_h)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \\ - & \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \\ - & \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k. \end{aligned}$$

# Annexe A

## Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

### A.1 Les opérateurs linéaires non bornés

Dans cette section,  $H$  et  $H'$  désignent deux espace de Hilbert.

**Définition A.1** On dit que l'application  $A : D(A) \subset H \longrightarrow H'$  un opérateur linéaire non borné ssi

- (i) Le domaine de définition  $D(A)$  de  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $H$
- (ii) L'image  $R(A)$  de  $A$  est incluse dans  $H'$
- (iii) L'application  $A$  est linéaire

$$A(u + \lambda v) = Au + \lambda Av \quad \text{pour tout } u, v \in D(A) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

**Définition A.2** Le graphe  $G(A)$  d'un opérateur non borné  $A : D(A) \subset H \longrightarrow H'$  est défini par

$$G(A) = \{(u, v) \in H \times H' : u \in D(A) \text{ et } v = Au\}. \quad (\text{A.2})$$

Dans la suite, nous munissons  $H \times H'$  de du produit scalaire et de la norme

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \left( \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v \\ v' \end{bmatrix} \right)_{H \times H'} = \sqrt{(u, v)_H + (u', v')_{H'}^2}, \\ \left\| \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \right\|_{H \times H'} = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|u'\|_{H'}^2} \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

**Définition A.3** Soit  $A : D(A) \subset H \longrightarrow H'$  un opérateur linéaire non borné. On dit que l'opérateur est fermé ssi son graphe est un sous-espace fermé de  $H \times H'$ .

Dit autrement,  $A$  est fermé ssi pour toute suite  $u_n \in D(A)$  vérifiant

$$\exists u \in H, v \in H' \quad u_n \xrightarrow{H} u \quad \text{et} \quad Au_n \xrightarrow{H'} v \quad (\text{A.4})$$

on a

$$u \in D(A) \quad \text{et} \quad Au = v. \quad (\text{A.5})$$

Dit encore autrement, l'opérateur linéaire non borné  $A : D(A) \subset H \longrightarrow H'$  est fermé ssi  $D(A)$  muni du produit scalaire  $(u, v)_{D(A)} = (u, v)_H + (Au, Av)_{H'}$  est un espace de Hilbert.

**Définition A.4** On dit que  $A : H \longrightarrow H'$  est un opérateur linéaire borné ssi c'est une application linéaire continue de  $H$  vers  $H'$ .

**Proposition A.5** Les opérateurs linéaires bornés sont des opérateurs linéaires non bornés fermés.

**Preuve.** Soit  $A : H \longrightarrow H'$  un opérateur linéaire borné. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $H$  vérifiant

$$\exists u \in H, v \in H' \quad u_n \xrightarrow{H} u \quad \text{et} \quad Au_n \xrightarrow{H'} v \quad (\text{A.6})$$

Comme  $D(A) = H$  et comme  $A$  est borné, il suit

$$u \in D(A) \quad \text{et} \quad u' = Au. \quad (\text{A.7})$$

**Exemple A.6** 1. Les opérateurs de dérivation  $u(\mathbf{x}) \mapsto u^{(p)}(\mathbf{x})$ ,  $p \geq 1$ , de domaine  $H^p(\mathbb{R})$ , sont des opérateurs non bornés de  $L^2(\mathbb{R})$ . Ces opérateurs sont fermés car  $H^p(\mathbb{R})$  est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u^{(p)}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (\text{A.8})$$

2. Les opérateurs de dérivation  $u(\mathbf{x}) \mapsto u^{(p)}(\mathbf{x})$ ,  $p \geq 1$ , de domaine  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , sont des opérateurs non bornés de  $L^2(\mathbb{R})$ . Ces opérateurs ne sont pas fermés car  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  n'est pas complet muni de la norme (A.8).

3. Nous notons par  $\ell^2$  l'ensemble des suite de carré sommable

$$\ell^2 = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n u_n^2 < \infty \right\} \quad (\text{A.9})$$

Soit  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty \quad (\text{A.10})$$

L'opérateur, de domaine

$$\ell^2_\beta = \left\{ (u_n) \in \ell^2 : \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n^2 u_n^2 < +\infty \right\},$$

défini par

$$(u_n) \mapsto (\beta_n u_n) \quad (\text{A.11})$$

est un opérateur linéaire non borné fermé de  $\ell^2$ .

4. Considéré sur l'ensemble des suites presque nulles

$$\mathcal{D} = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists N > 0 \quad \forall n \geq N \quad u_n = 0 \right\} \quad (\text{A.12})$$

l'opérateur  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\beta_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un opérateur linéaire non borné de  $\ell^2$ . Cet opérateur n'est pas fermé car  $\mathcal{D}$  n'est pas complet pour la norme

$$\|u\|_{\ell^2_\beta} = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \beta_n^2) u_n^2} \quad (\text{A.13})$$

**Définition A.7** Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H'$  un opérateur linéaire non borné injectif. L'inverse  $A^{-1} : R(A) \subset H' \rightarrow H$  de  $A$  est l'opérateur qui associe à  $u' \in R(A)$  l'unique  $u \in D(A)$  qui vérifie

$$Au = u'. \quad (\text{A.14})$$

**Proposition A.8** Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H'$  est un opérateur linéaire fermé non borné injectif d'image  $R(A)$ . Son inverse  $A^{-1} : R(A) \subset H' \rightarrow H$  est un opérateur linéaire non borné fermé.

**Preuve.** On remarque que  $G(A^{-1}) = i(G(A))$  avec  $i$  l'application continue inversible.

$$i : H \times H' \rightarrow H' \times H \quad (u, u') \mapsto (u', u) \quad (\text{A.15})$$

Le graphe de  $A$  étant fermé, il en est de même pour celui de  $A^{-1}$ .

**Définition A.9** Soient  $A : D(A) : H \rightarrow H'$  et  $B : D(B) : H \rightarrow H'$  deux opérateurs linéaires non bornés. L'opérateur  $A + B$ , de domaine de définition  $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ , est défini par :

$$(A + B)u = Au + Bu \quad \forall u \in D(A + B). \quad (\text{A.16})$$



**Proposition A.10** *Si  $A : D(A) : H \longrightarrow H'$  est fermé et  $B : H \longrightarrow H'$  est borné alors  $A + B$  est fermé.*

**Preuve.** On remarque tout d'abord que  $D(A + B) = D(A)$ . Soit  $u_n \in D(A)$  qui vérifie

$$\exists u \in H, u' \in H' \quad u_n \xrightarrow{H} u \quad \text{et} \quad (A + B)u_n \xrightarrow{H'} u'. \quad (\text{A.17})$$

Comme  $B$  est continue, on a

$$Bu_n \xrightarrow{H'} Bu. \quad (\text{A.18})$$

Il suit que

$$\exists u \in H, u' \in H' \quad u_n \xrightarrow{H} u \quad \text{et} \quad Au_n \xrightarrow{H'} u' - Bu. \quad (\text{A.19})$$

Comme  $A$  est fermé, on a

$$u \in D(A) \quad \text{et} \quad Au = u' - Bu. \quad (\text{A.20})$$

C'est à dire

$$u \in D(A + B) \quad \text{et} \quad (A + B)u = u'. \quad (\text{A.21})$$

Il suit que  $A + B$  est fermé.

**Remarque A.11** *Si  $A$  et  $B$  sont des opérateurs non bornés fermés. L'opérateur  $A + B$  ne sont pas nécessairement fermés. En effet Soient  $A : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$  et  $B : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$  définis par*

$$Au = \frac{du}{dx} + u \quad \text{et} \quad Bu = \frac{du}{dx} \quad (\text{A.22})$$

L'opérateur  $A + B : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$

$$(A + B)u = u \quad (\text{A.23})$$

*n'est pas fermé car  $H^1(\mathbb{R})$  n'est pas fermé pour la norme  $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$ .*

## A.2 Les opérateurs maximaux monotones

Dans la dernière section, nous nous sommes intéressés aux opérateurs non bornés. Nous nous intéressons ici plus particulièrement à une classe plus petite d'opérateurs qui interviennent dans le théorème de Hille-Yoshida.

Dans cette section  $H$  désigne un espace de Hilbert.

**Définition A.12** Soit  $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$  un opérateur linéaire non borné.

(i) L'opérateur  $A$  est monotone ssi  $(Au, u)_H \geq 0$  pour tout  $u \in D(A)$ .

(ii) L'opérateur  $A$  est maximal ssi pour tout  $f \in H$  il existe  $u \in D(A)$  tel que  $Au + u = f$ .

**Proposition A.13** Si  $A$  est maximal monotone alors son domaine est dense dans  $H$ .

**Preuve.** Soit  $f \in H$  orthogonal à tous les éléments de  $D(A)$ . Montrons que  $f$  est nul. Comme  $A$  est maximal, il existe  $u \in D(A)$  qui vérifie  $u + Au = f$ . Comme  $(f, u)_H = 0$ , on a  $(u, u)_H + (Au, u)_H = 0$ . Comme  $A$  est monotone  $(Au, u)_H \geq 0$ , il suit que  $(u, u)_H = 0$  puis  $u = 0$  et par conséquent  $f = 0$ .

**Proposition A.14** Si  $A$  est monotone alors l'opérateur  $I + \lambda A$  avec  $\lambda > 0$  est injectif.

**Preuve.** Pour tout  $u \in \ker(I + \lambda A)$ , on a

$$u + \lambda Au = 0 \iff (Au + \lambda u, u)_H = 0 \iff (u, u)_H + \lambda(Au, u)_H = 0.$$

Ces deux termes étant positifs, il suit  $(u, u)_H = 0$  et donc  $u = 0$ .

**Proposition A.15** Si  $A$  est monotone, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} R(I + A) = H &\iff R(I + \lambda A) = H \text{ pour un } \lambda > 0 \\ &\iff R(I + \lambda A) = H \text{ pour tout } \lambda > 0. \end{aligned} \tag{A.24}$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que si  $R(I + \lambda_0 A) = H$  avec  $\lambda_0 > 0$  alors  $R(I + \lambda A) = H$  pour tout  $\lambda \in ]0, 2\lambda_0[$ .

Il nous faut trouver  $u$  qui vérifie  $Au + \lambda u = f$  ou de manière équivalente

$$u + \lambda_0 Au + (\lambda - \lambda_0)Au = f \iff u + \lambda_0 Au = f - (\lambda - \lambda_0)Au \tag{A.25}$$

C'est à dire

$$u + \lambda_0 Au = f - \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} (I + \lambda_0 A)u + \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} u \tag{A.26}$$

D'après la proposition A.14, l'opérateur  $A + \lambda_0 I$  est bijectif. On obtient l'équation de point fixe

$$u = F(u) := \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} u + (I + \lambda_0 A)^{-1} f - \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} (I + \lambda_0 A)^{-1} u \tag{A.27}$$

qui admet une unique solution si  $F$  est contractante. Il nous suffit donc de montrer que

$$\exists \alpha < 1 \quad \left| \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \right| \|u - (I + \lambda_0 A)^{-1}u\|_{\mathbb{H}} \leq \alpha \|u\|_{\mathbb{H}}. \quad (\text{A.28})$$

Soit  $f = (I + \lambda_0 A)^{-1}u$  et  $g = u - f$ . On a

$$f + \lambda_0 A f = u \implies (f, f)_{\mathbb{H}} + \lambda_0 (A f, f)_{\mathbb{H}} = (u, f)_{\mathbb{H}}. \quad (\text{A.29})$$

Comme  $A$  est monotone, il suit

$$(f, f)_{\mathbb{H}} \leq (u, f)_{\mathbb{H}} \quad (\text{A.30})$$

D'autre part, on a

$$\|u - f\|_{\mathbb{H}}^2 = (f - u, f - u)_{\mathbb{H}} = (u, u)_{\mathbb{H}} - 2(u, f)_{\mathbb{H}} + (f, f)_{\mathbb{H}}. \quad (\text{A.31})$$

D'après (A.30), on a

$$\|u - f\|_{\mathbb{H}}^2 \leq (u, u)_{\mathbb{H}} - (f, f)_{\mathbb{H}} \leq (u, u)_{\mathbb{H}} = \|u\|_{\mathbb{H}}. \quad (\text{A.32})$$

Il suit par inégalité triangulaire

$$\|u - (I + \lambda_0 A)^{-1}u\|_{\mathbb{H}} = \|u - f\|_{\mathbb{H}} \leq \|u\|_{\mathbb{H}} \quad (\text{A.33})$$

Comme  $0 < \lambda < 2\lambda_0$ , on a

$$\left| \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \right| < 1 \quad (\text{A.34})$$

L'application  $F$  est donc contractante.

**Corollaire A.16** *Si  $A$  est maximal monotone alors, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $I + \lambda A$  est bijectif de  $D(A)$  vers  $\mathbb{H}$ .*

**Preuve.** L'injectivité et la surjectivité proviennent des propositions A.14 et A.15.

**Proposition A.17** *Si  $A$  est maximal monotone et  $\lambda > 0$  alors  $(I + \lambda A)^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  est borné et*

$$\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} \leq 1. \quad (\text{A.35})$$

**Preuve.** Il nous suffit de montrer l'inégalité (A.35). Pour tout  $f \in \mathbb{H}$  et  $u = (I + \lambda A)^{-1}f$ , on a

$$\|u\|_{\mathbb{H}}^2 \leq (u, u)_{\mathbb{H}} + \lambda (A u, u)_{\mathbb{H}} = (f, u)_{\mathbb{H}} \leq \|f\|_{\mathbb{H}} \|u\|_{\mathbb{H}} \quad (\text{A.36})$$

Il suit

$$\|(I + \lambda A)^{-1}f\|_{\mathbb{H}} = \|u\|_{\mathbb{H}} \leq \|f\|_{\mathbb{H}}. \quad (\text{A.37})$$

**Proposition A.18** *Si  $A$  est maximal et monotone alors  $A$  est fermé.*

**Preuve.** D'après la proposition A.17,  $(I + A)^{-1}$  est borné. Son inverse  $I + A$  est donc fermé d'après la proposition A.8. Il en est donc de même pour  $A = (I + A)^{-1}$  d'après la proposition A.10.

**Exemple A.19** *L'opérateur suivant est maximal monotone*

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{u} &\longmapsto -\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

*Cet opérateur est monotone car par intégration par partie on a*

$$\left(-\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2}, \mathbf{u}\right)_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx}, \frac{d\mathbf{u}}{dx}\right)_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (\text{A.39})$$

*Montrons maintenant que  $A$  est maximal. Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe  $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R})$  qui vérifie pour tout  $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R})$*

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dx}, \frac{d\mathbf{v}}{dx}\right)_{L^2(\mathbb{R})} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\mathbb{R})} = (f, \mathbf{v})_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (\text{A.40})$$

*En prenant  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , il suit que  $\mathbf{u}$  vérifie au sens des distributions*

$$-\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \mathbf{u} = f. \quad (\text{A.41})$$

*Par conséquent, on a  $\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} = -f + \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R})$  et donc  $\mathbf{u} \in H^2(\mathbb{R})$ . On conclut donc à la maximalité.*

**Exemple A.20** *L'opérateur suivant est maximal monotone*

$$\begin{aligned} H_D^2([0, L]) \subset L^2([0, L]) &\longrightarrow L^2([0, L]) \\ \mathbf{u} &\longmapsto -\mathbf{u}'' \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

*avec*

$$H_D^2([0, L]) = \{\mathbf{u} \in H^2([0, L]) : \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(L) = 0\} \quad (\text{A.43})$$

La monotone suit d'une intégration par partie :

$$\left( -\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2}, \mathbf{u} \right)_{L^2([0,L])} = \left( \frac{d\mathbf{u}}{dx}, \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right)_{L^2([0,L])} \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in H_D^2([0, L]). \quad (\text{A.44})$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe  $\mathbf{u} \in H_0^1(\mathbb{R})$  qui vérifie pour tout  $\mathbf{v} \in H_0^1([0, L])$

$$\left( \frac{d\mathbf{u}}{dx}, \frac{d\mathbf{v}}{dx} \right)_{L^2([0,L])} + \left( \mathbf{u}, \mathbf{v} \right)_{L^2([0,L])} = \left( \mathbf{f}, \mathbf{v} \right)_{L^2([0,L])}. \quad (\text{A.45})$$

En prenant  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(]0, L[)$ , il suit que  $\mathbf{u}$  vérifie au sens des distributions

$$-\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (\text{A.46})$$

Par conséquent, on a  $\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} = -\mathbf{f} + \mathbf{u} \in L^2([0, L])$  et donc  $\mathbf{u} \in H_D^2([0, L])$ . On conclut donc à la maximalité.

**Exemple A.21** On démontre de manière analogue que l'opérateur suivant est maximal monotone

$$\begin{aligned} H_N^2([0, L]) \subset L^2([0, L]) &\longrightarrow L^2([0, L]) \\ \mathbf{u} &\longmapsto -\mathbf{u}'' \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

avec

$$H_N^2([0, L]) = \{\mathbf{u} \in H^2([0, L]) : \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}'(L) = 0\}. \quad (\text{A.48})$$

**Exemple A.22** L'opérateur suivant n'est pas monotone

$$\begin{aligned} H^2([0, L]) \subset L^2([0, L]) &\longrightarrow L^2([0, L]) \\ \mathbf{u} &\longmapsto -\mathbf{u}'' \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Soit  $\mathbf{u}(x) = x^2$

$$\left( -\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2}, \mathbf{u} \right)_{L^2(\mathbb{R})} = -\int_0^L 2x^2 dx < 0 \quad (\text{A.50})$$

**Exemple A.23** Soit

$$H_0^2([0, L]) = \{u \in H^2([0, L]) : u(0) = u(L) = 0 \text{ et } u'(0) = u'(L) = 0\} \quad (\text{A.51})$$

Montrer que l'opérateur suivant n'est pas maximal

$$\begin{aligned} H_0^2([0, L]) \subset L^2([0, L]) &\longrightarrow L^2([0, L]) \\ u &\longmapsto -u'' \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

L'opérateur  $u \mapsto -\frac{d^2u}{dx^2} + u$  est bijectif de  $H_D^2([0, L])$  vers  $L^2([0, L])$ . Comme  $H_0^2([0, L])$  est strictement inclus dans  $H_D^2([0, L])$ , l'image de l'opérateur  $u \mapsto -\frac{d^2u}{dx^2} + u$  de domaine  $H_0^2([0, L])$  est strictement inclus dans  $L^2([0, L])$ .

## A.3 Continuité, Dérivation dans les espaces de Banach et intégration dans les espace de Hilbert

### A.3.1 Notion de continuité dans un espace de Banach

Soit  $f : I \longrightarrow V$  une application allant d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  vers  $V$  un espace de Banach

$$I = [a, b] \text{ ou } ]a, b[ \text{ ou } [a, b[ \text{ ou } ]a, b] \text{ avec } \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \ni a < b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad (\text{A.53})$$

On dit que  $f$  est continue en  $t \in I$  si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t + \varepsilon) = f(t) \text{ dans } V \quad (\text{A.54})$$

C'est à dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f(t + \varepsilon) - f(t)\|_V = 0. \quad (\text{A.55})$$

On note alors l'ensemble des fonctions continues sur  $I$  à valeur dans  $V$

$$C^0(I, V) \quad (\text{A.56})$$

**Remarque A.24** Bien entendu, un espace de Hilbert est un espace de Banach. Rappelons aussi que l'ensemble des applications linéaires entre deux espace de Hilbert est aussi un espace de Banach.

**Exemple 1.** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soit  $A$  un opérateur linéaire borné. On note  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ , avec  $\mathcal{L}(H)$  l'ensemble des applications allant de  $H$  vers  $H$ , défini par

$$B(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^n t^n}{n!} \quad (\text{A.57})$$

Il suit à l'aide de l'inégalité triangulaire que

$$\|B(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = \exp(-At) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(H)}^n |t|^n}{n!} = \exp(\|A\|_{\mathcal{L}(H)} |t|) \quad (\text{A.58})$$

où l'espace  $\mathcal{L}(H)$  a été muni de la norme d'opérateur

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{v \in H} \frac{\|Av\|_H}{\|v\|_H} \quad (\text{A.59})$$

D'autre part, comme  $B(t+s) = B(t)B(s)$  il suit

$$B(t+\varepsilon) - B(t) = B(t)(B(\varepsilon) - I) \quad (\text{A.60})$$

Il suit que

$$\|B(t+\varepsilon) - B(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|B(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \|B(\varepsilon) - I\|_{\mathcal{L}(H)} \quad (\text{A.61})$$

Par inégalité triangulaire, on a

$$\|B(\varepsilon) - I\|_{\mathcal{L}(H)} = \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^n \varepsilon^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(H)}^n |\varepsilon|^n}{n!} = \exp(\|A\|_{\mathcal{L}(H)} |\varepsilon|) - 1 \quad (\text{A.62})$$

On déduit que

$$\|B(t+\varepsilon) - B(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \left( \exp(\|A\|_{\mathcal{L}(H)} |\varepsilon|) - 1 \right) \exp(\|A\|_{\mathcal{L}(H)} |t|) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (\text{A.63})$$

L'opérateur  $B(t)$  est donc de classe  $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H))$ .

**Exemple 2.** Multiplication par un opérateur borné à faire

### A.3.2 Notion de dérivation dans un espace de Banach

### A.3.3 Intégration dans un espace de Hilbert

Nous ne cherchons pas ici à définir une intégrale générale de fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert. Pour le cas général, on pourra se référer aux ouvrages portant sur l'intégrale de Bochner.

Une des méthodes particulièrement simple pour définir l'intégrale d'une fonction à valeur dans un espace de Hilbert est basé sur le théorème de Riesz.

Considérons une fonction  $f \in C^0(I, H)$  avec  $I = [a, b]$ ,  $a < b$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On définit  $\varphi_f = \int_I f(t) dt$  comme l'unique élément de  $H$  qui vérifie pour tout  $v \in H$

$$(\varphi_f, v)_H = \int_I (f(t), v)_H dt \quad (\text{A.64})$$

**Lemme A.25** *L'application  $v \mapsto \int_I (f(t), v)_H$  est une forme linéaire continue*  
**preuve.**

## A.4 L'alternative de Fredholm

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $K : H \rightarrow H$  un opérateur compact. Soit  $S : H \rightarrow H$  l'opérateur linéaire  $u \mapsto u + Ku$ .

L'objet de cette section est de démontrer le théorème suivant

**Théorème A.26** *L'opérateur  $S$  est injectif si et seulement si il est surjectif.*

Nous allons ici seulement démontrer que l'injectivité implique la surjectivité, car cela sera le seul résultat utilisé par la suite. La réciproque nécessite un petit développement sur les opérateurs adjoints.

**Proposition A.27** *Si  $S = I + K$  est injectif alors  $S$  est un opérateur à image fermé*

**Démonstration :**

Soit  $u_n$  une suite de  $H$  tel que  $v_n = Su_n$  converge vers  $v$  dans  $H$ .

$$v_n = u_n + Ku_n \quad (\text{A.65})$$

**Montrons que  $u_n$  est borné.** On raisonne par l'absurde. Supposons que l'on peut extraire de  $u_n$  une sous-suite  $u_{\sigma_n}$  qui vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{\sigma_n}\| = +\infty. \quad (\text{A.66})$$

Considérons la suite  $\tilde{u}_n = u_{\sigma_n} / \|u_{\sigma_n}\|$  qui vérifie

$$\|\tilde{u}_n\| = 1 \text{ et } \tilde{u}_n + K\tilde{u}_n = \frac{v_n}{\|u_n\|}. \quad (\text{A.67})$$



On peut extraire de  $\tilde{u}_n$  une sous-suite  $\tilde{u}_{\sigma_n}$  qui converge faiblement vers  $\tilde{u}$  et tel que  $\tilde{u}_{\sigma_n} + K\tilde{u}_{\sigma_n}$  converge fortement vers 0. Comme  $K$  est compact  $K\tilde{u}_{\sigma_n}$  converge fortement vers  $K\tilde{u}$ . Ainsi,  $\tilde{u}_{\sigma_n} = \tilde{u}_{\sigma_n} + K\tilde{u}_{\sigma_n} - K\tilde{u}_{\sigma_n}$  converge fortement vers  $-K\tilde{u}$ . Par unicité de la limite faible, on a  $\tilde{u} + K\tilde{u} = 0$ . Il suit que  $\tilde{u} = 0$ . Impossible car  $\tilde{u}_{\sigma_n}$  est de norme 1 et ne peut pas converger fortement vers 0. Ceci est impossible.

**Montrons que  $u_n$  converge vers  $u \in H$  et concluons.** Comme  $u_n$  est borné. On peut extraire une sous suite  $u_{\sigma_n}$  faiblement convergente vers  $u \in H$ . Comme  $K$  est compact,  $Ku_{\sigma_n}$  converge fortement vers  $Ku$ . ainsi  $u_n = u_n + Ku_n - Ku_n$  converge fortement et donc faiblement vers  $v - Ku$ . Par unicité de la limite faible, il suit que  $u = v - Ku$ . C'est à dire  $v = u + Ku$  et par conséquent que  $v$  est dans l'image de  $S$ . ■

Dans la suite nous notons  $R_n$  l'image de  $S^n$ , c'est à dire le sous espace vectoriel de  $H$

$$R_n = \left\{ f = S^n u \text{ with } u \in H \right\} \quad (\text{A.68})$$

**Proposition A.28** *Si  $S = I + K$  est injectif alors*

- soit  $S$  est surjectif
- soit la suite de sous-ensemble  $R_n$  est strictement décroissante ( $R_{n+1} \subset R_n$  and  $R_{n+1} \neq R_n$ )

**Démonstration :**

Pour tout  $f \in R_{n+1}$ , il existe  $x \in H$  tel que  $f = S^{n+1}x = S^n y$  avec  $y = Sx$ . Il suit que  $f \in R_n$ . Ainsi,  $R_{n+1} \subset R_n$ .

Pour conclure, il nous suffit de montrer que si  $S$  n'est pas surjectif alors  $R_{n+1} \neq R_n$ . Nous raisonnons par l'absurde et supposons que  $R_{n+1} = R_n$ . Comme  $S$  n'est pas surjectif, on a  $R_1 \neq H$ . Par conséquent, il existe  $x \in H \setminus R_1$ . Le vecteur  $y = Sx$  est dans  $R_n$ . Comme  $R_n = R_{n+1}$ , c'est aussi un élément de  $R_{n+1}$ . C'est à dire  $y = S^{n+1}z$  avec  $z \in H$  et par conséquent

$$S^n x = S^{n+1}z \text{ c'est à dire } S^n(x - Sz) = 0. \quad (\text{A.69})$$

Comme  $S$  est injectif,  $S^n$  l'est aussi. Ainsi, on a  $x = Sz$  et par conséquent  $x \in R_1$ . Ceci est impossible. ■

**Proposition A.29** *Si  $S = I + K$  est injectif alors  $S$  est surjectif.*

**Démonstration :**

On raisonne par l'absurde : nous supposons que  $S$  n'est pas surjectif. D'après la

proposition A.28, la suite  $R_n$  est strictement décroissante. Comme  $S^n = I + K_n$  avec  $K_n$  un opérateur compact donné par

$$K_n = \sum_{p=1}^n C_p^n K^p \quad \text{avec } C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \quad (\text{A.70})$$

D'après la proposition A.27,  $R_n = \mathcal{R}(S^n)$  est fermé.

Il existe donc une suite  $z_n \in R_n \cap (R_{n+1})^\perp$  tel que  $\|z_n\| = 1$ . On a d'après le théorème de Pythagore

$$\|w - z_n\|^2 = \|w\|^2 + \|z_n\|^2 \geq 1 \quad \text{pour tout } w \in R_{n+1}. \quad (\text{A.71})$$

Comme la suite  $z_n$  est bornée, il existe une extraction strictement croissante  $\sigma$  tel que  $z_{\sigma_n}$  converge faiblement vers  $z$  dans  $H$ . Comme  $K$  est compact, la suite  $Kz_{\sigma_n}$  converge fortement vers  $Kz$  dans  $H$ .

$$Kz_{\sigma_n} - Kz_{\sigma_{n+1}} = (I + K)z_{\sigma_n} - (I + K)z_{\sigma_{n+1}} + z_{\sigma_{n+1}} - z_{\sigma_n} \quad (\text{A.72})$$

Comme  $(I + K)z_{\sigma_n} \in R_{\sigma_n+1}$ ,  $(I + K)z_{\sigma_{n+1}} \in R_{\sigma_{n+1}+1} \subset R_{\sigma_n+1}$  and  $z_{\sigma_{n+1}} \in R_{\sigma_{n+1}}$ , il suit que  $(I + K)z_{\sigma_n} - (I + K)z_{\sigma_{n+1}} + z_{\sigma_{n+1}} \in R_{\sigma_n+1}$ . D'après (A.71), on a

$$\|Kz_{\sigma_{n+1}} - Kz_{\sigma_n}\| \geq 1. \quad (\text{A.73})$$

Ceci est impossible car la suite  $Kz_{\sigma_n}$  est de Cauchy. ■

# Annexe B

## Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis

### B.1 Approximation de Galerkin

Dans cette section, nous cherchons la solution du problème :

Trouver  $u(t) \in H^1(\Omega)$  tel que, pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ , on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(t)v + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_a} c^2(x)vu(t) + \int_{\Omega} c^2(x)\nabla u(t) \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_d} c^2(x)v\nabla u(t) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ u(0) = u_0 \\ \frac{du}{dt}(0) = u_1. \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

L'inconvénient de cette formulation est que l'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de dimension infinie, peu pratique à utiliser numériquement. Nous utiliserons donc une famille de sous-espaces vectoriels  $V_h \subset H^1(\Omega)$ , de dimension finie  $N_h$  qui approche  $H^1(\Omega)$  au sens suivant :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{H^1(\Omega)} = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Nous donnerons des exemples d'espace  $V_h$  dans la section B. Pour le moment nous précisons seulement que  $h$  est un paramètre destiné à tendre vers 0 et que  $\lim_{h \rightarrow 0} N_h = +\infty$ .

Nous cherchons maintenant  $u_h(t) \in V_h$  tel que, pour tout  $v_h \in V_h$ , on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h(t) v_h + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_a} c^2(x) v_h u_h(t) + \int_{\Omega} c^2(x) \nabla u_h(t) \cdot \nabla v_h = 0 \\ u_h(0) = u_{0h} \in V_h \\ \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1h} \in V_h, \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

où  $u_{0h}$  et  $u_{1h}$  sont des approximations respectives de  $u$  et de  $v$  au sens :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_0 - u_{0h}\|_{H^1(\Omega)} \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \|u_1 - u_{1h}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous notons  $(\phi_i)_{i=1, N_h}$  une base de  $V_h$  et  $(\alpha_i(t))_{i=1, N_h}$  les composantes de  $u_h(t)$  dans cette base :

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(t) \phi_i.$$

Remarquons maintenant que chercher  $u_h(t)$  solution de (B.2) pour tout  $v \in V_h$  est équivalent à chercher  $u_h(t)$  solution de (B.2) pour tout  $v \in (\phi_i)_{i=1, N_h}$ . Le problème s'écrit alors :

Trouver  $(\alpha_i(t))_{i=1, N_h}$  tel que, pour tout  $j = 1, N_h$ , on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(t) \phi_i \phi_j + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_a} c^2(x) \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(t) \phi_i \phi_j + \int_{\Omega} c^2(x) \nabla \left( \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(t) \phi_i \right) \cdot \nabla \phi_j = 0 \\ \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(0) \phi_i = u_{0h} \\ \sum_{i=1}^{N_h} \frac{d\alpha_i}{dt}(0) \phi_i = u_{1h}, \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

ce qui peut se réécrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N_h} \frac{d^2 \alpha_i(t)}{dt^2} \int_{\Omega} \phi_i \phi_j + \sum_{i=1}^{N_h} \frac{d \alpha_i(t)}{dt} \int_{\Gamma_a} c^2(x) \phi_i \phi_j + \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(t) \int_{\Omega} c^2(x) \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = 0 \\ \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(0) \phi_i = u_{0h} \\ \sum_{i=1}^{N_h} \frac{d \alpha_i}{dt}(0) \phi_i = u_{1h}. \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

Nous pouvons alors définir le vecteur  $U(t) = (\alpha_i(t))$  ainsi que les matrices

$$M = \left( \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \right)_{i,j}, \quad B = \left( \int_{\Gamma_a} c^2(x) \phi_i \phi_j \right)_{i,j} \quad \text{et} \quad K = \left( \int_{\Omega} c^2(x) \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \right)_{i,j},$$

respectivement appelées matrices de masse, de frontière et de raideur pour obtenir le système différentiel ordinaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 U}{dt^2} + B \frac{dU}{dt} + KU = 0 \\ U(0) = u_{0h} \\ \frac{dU}{dt}(0) = u_{1h}. \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

Nous allons maintenant nous intéresser au choix des espaces  $V_h$ .

## B.2 Les éléments finis de Lagrange (rappel)

Il existe de nombreuses façons de construire une famille d'espace  $V_h$ . Nous nous intéressons ici à la méthode des éléments finis, et plus particulièrement aux éléments finis de Lagrange.

### B.2.1 Le maillage

**Définition B.1** *Un maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  est une partition de  $\Omega$  en  $L_h$  polyèdres convexes  $(K_l)_{l=1, L_h}$  (des segments en 1D, généralement des triangles ou des rectangles en 2D, des tétraèdres ou des hexaèdres en 3D), d'intérieur non vide et tels que  $K_l \cap K_m = \emptyset$ .*

Le maillage est dit “conforme” si, de plus, toute face d’un élément est soit la face d’un autre élément, soit une face portée par le bord (voir Figs B.1 et B.2). Les éléments finis de Lagrange sont définis sur des maillages conformes.

Nous ne considérerons ici que des triangles ou des tétraèdres et nous supposons que la fonction  $c(x)$  est constante par maille. On notera  $NT_h$ , le nombre d’éléments du maillage.

Pour chaque élément  $K$ , nous définissons :

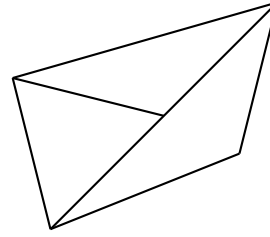
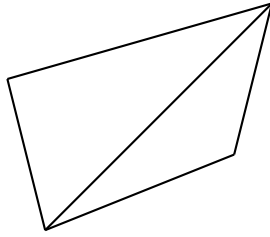


FIGURE B.1 – Un maillage conforme      FIGURE B.2 – Un maillage non conforme

- $h_K$ , le diamètre de  $K$  ;
- $\rho_K$ , le diamètre maximum des sphères (ou cercle en 2D) contenues dans  $K$ .

Nous noterons  $h = \min_K h_K$  le diamètre du plus petit élément du maillage. Nous supposons de plus qu’il existe une constante  $\sigma \geq 1$  telle que :

$$\forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma.$$

Cette dernière condition nous impose de choisir des éléments qui ne sont pas trop aplatis.

Nous appelons élément de référence  $\hat{K}$  le segment  $[0, 1]$  en 1D, le triangle de sommet  $\hat{S}_1(0, 0)$ ,  $\hat{S}_2(1, 0)$ ,  $\hat{S}_3(0, 1)$  en 2D ou le tétraèdre de sommet  $\hat{S}_1(0, 0, 0)$ ,  $\hat{S}_2(1, 0, 0)$ ,  $\hat{S}_3(0, 1, 0)$ ,  $\hat{S}_4(0, 0, 1)$ . Il existe, pour tout élément  $K$ , une fonction affine  $F_K$  qui transforme  $\hat{K}$  en l’élément  $K$  :

– en 1D :

$$F_K(\hat{x}) = x_1 + (x_2 - x_1)\hat{x} ;$$

– en 2D :

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} ;$$

– en 3D :

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} .$$

où  $x_i, y_i, z_i$  sont les coordonnées du sommet  $S_i$  de l'élément  $K$  (voir Figures B.3, B.4 et B.5). Cette fonction peut s'écrire sous forme matricielle

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = A_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K$$

et son jacobien vérifie :

$$J_{F_K} = A_K \quad \text{et} \quad |J_{F_K}| = |\det(A_K)|.$$

Il nous reste encore à déterminer les degrés de liberté du maillage. Pour cela nous définissons d'abord les degrés de liberté sur l'élément de référence :

– en dimension 1, les degrés de liberté de l'élément fini de Lagrange  $P_k$  sont les points de coordonnées

$$\hat{x}_i = \frac{i-1}{k}, \quad i = 1..k+1;$$

– en dimension 2, les degrés de liberté de l'élément fini de Lagrange  $P_k$  sont les points de coordonnées

$$(\hat{x}_i, \hat{y}_j) = \left( \frac{i-1}{k}, \frac{j-1}{k} \right) \mid x_i + y_j \leq 1, \quad i, j = 1..k+1;$$

– en dimension 3, les degrés de liberté de l'élément fini de Lagrange  $P_k$  sont les points de coordonnées

$$(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_l) = \left( \frac{i-1}{k}, \frac{j-1}{k}, \frac{l-1}{k} \right) \mid x_i + y_j + z_l \leq 1, \quad i, j, l = 1..k+1.$$

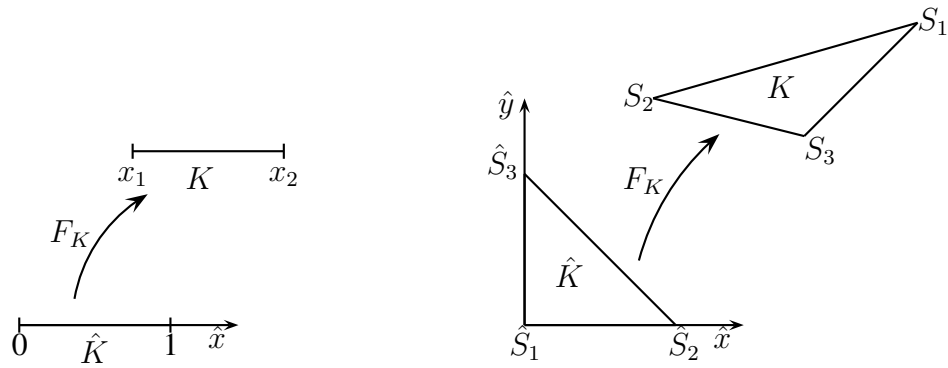


FIGURE B.3 – Le segment de référence FIGURE B.4 – Le triangle de référence

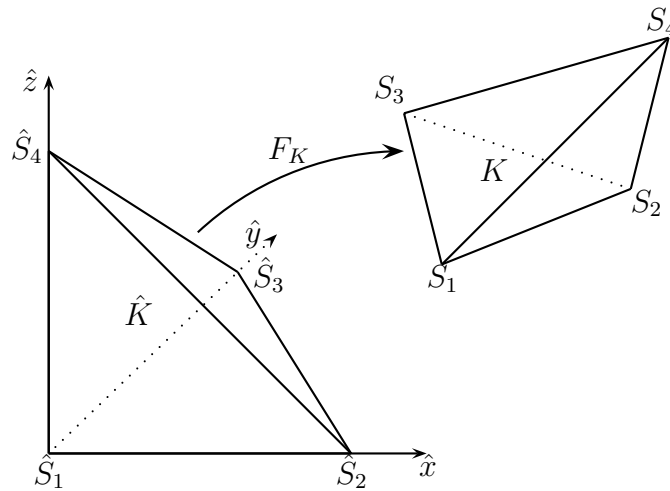


FIGURE B.5 – Le tétraèdre de référence

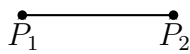


FIGURE B.6 –  $P_1$

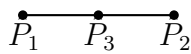


FIGURE B.7 –  $P_3$

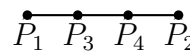


FIGURE B.8 –  $P_3$



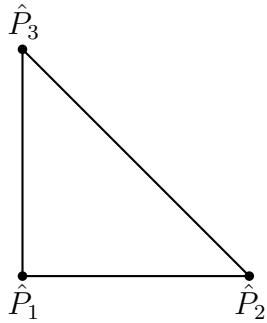


FIGURE B.9 –  $P_1$

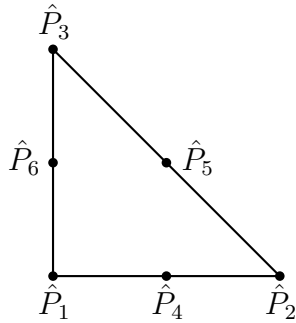


FIGURE B.10 –  $P_2$

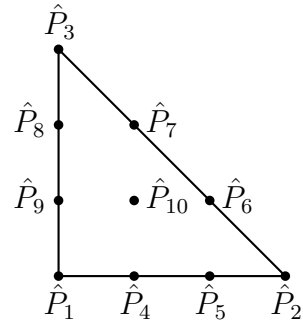


FIGURE B.11 –  $P_3$

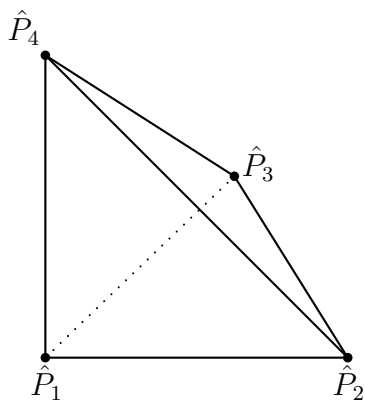


FIGURE B.12 –  $P_1$

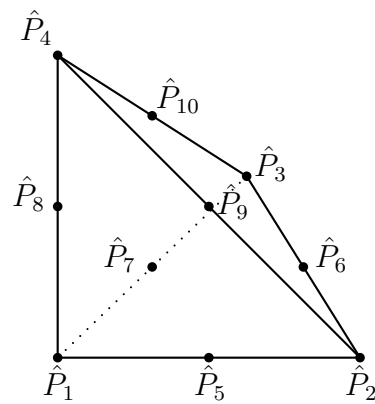


FIGURE B.13 –  $P_2$

On notera  $\hat{N}_k$  le nombre de degrés de liberté de  $\hat{K}$ .

Les degrés de liberté de l'élément  $K$  sont alors les images par  $F_K$  des degrés de liberté de  $\hat{K}$ . Nous noterons  $NP_h$  le nombre de degrés de liberté associés au maillage  $\mathcal{T}_h$

Pour la prise en compte des conditions aux bords (le calcul de la matrice  $B$ ), nous avons également besoin de connaître les faces (ou les arêtes) appartenant à la frontière absorbante  $\Gamma_a$ . L'ensemble de ces faces est noté  $\mathcal{F}_h$ , et pour chaque face  $F$  de  $\mathcal{F}_h$ , il existe une fonction affine  $G_F$  transformant la face de référence  $\hat{F}$  (en 2D le segment  $[0, 1]$ , en 2D le triangle  $\hat{S}_1\hat{S}_2\hat{S}_3$ ) en la face  $F$ .

– en 2D :

$$G_F(\hat{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \hat{x} ;$$

– en 3D :

$$G_F(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} .$$

où  $x_i, y_i, z_i$  sont les coordonnées du sommet  $S_i$  de la face  $F$ . Nous notons de plus  $NF_h$  le nombre de faces de  $\mathcal{B}_h$  et  $\hat{N}P^F$  le nombre de degrés de liberté par face.

En pratique, un maillage est caractérisé par (au moins) trois données :

1. les coordonnées des sommets et des degrés de liberté de tous les éléments.  
Dans le cas des éléments finis  $P_k$ , la connaissance des sommets est suffisante puisque nous pouvons déterminer les coordonnées des degrés de liberté à partir de la fonction  $F_K$  ;
2. la connectique de chaque élément, c'est-à-dire le numéro des sommets et des degrés de liberté appartenant à l'élément. Par exemple, sur la figure B.14, le triangle 2 a pour degrés de liberté les noeuds 5, 2, 3 (les sommets), 7, 8 et 9. Profitons de cet exemple pour rappeler la différence entre numérotation locale et globale : le premier degré de liberté du triangle 2 (local) est le cinquième degré de liberté du maillage (global). Nous noterons  $lg_{K,i}$  la fonction qui permet de déterminer la numérotation globale du  $i$ -ème degré de liberté de l'élément  $K$  ;

3. les faces appartenant au bord du domaine, leur connectique et le type de condition de bord. Nous noterons  $l_{g f_{F,i}}$  la fonction qui permet de déterminer la numérotation globale du  $i$ -ème degré de liberté de la face  $F$ .

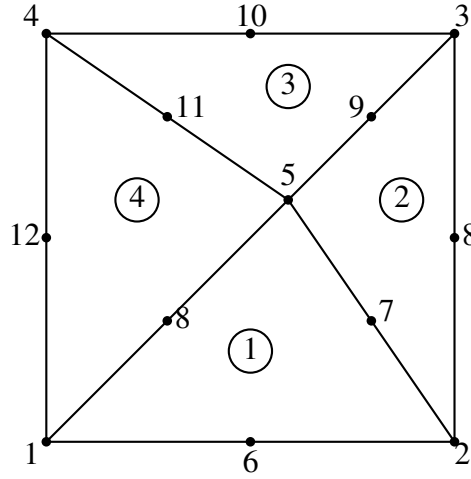


FIGURE B.14 – Numérotation des éléments et des degrés de liberté

## B.2.2 Construction de l'espace $V_h$

Nous allons maintenant construire une base de l'espace  $V_h$ . Remarquons tout d'abord que,  $V_h$  étant un sous-espace vectoriel de  $H^1(\Omega)$ , les fonctions de  $V_h$  doivent être continues sur  $\Omega$ . Comme nous utilisons des éléments finis  $P^k$ , nous cherchons des fonctions polynômiales de degré  $k$  par élément :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in P^k(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Une base de cet espace est donnée par les fonctions  $(\phi_i)_{i=1, NP_h}$  qui vérifient

$$\begin{cases} \phi_i(P_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1..NP_h \\ \phi_i|_K \in P^k(K) \forall K \in \mathcal{T}_h \forall i = 1..NP_h \end{cases}$$

Cet espace est donc de dimension  $NP_h$  et toute fonction  $v_h$  de  $V_h$  vérifie

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{NP_h} v_h(P_i) \phi_i(x),$$

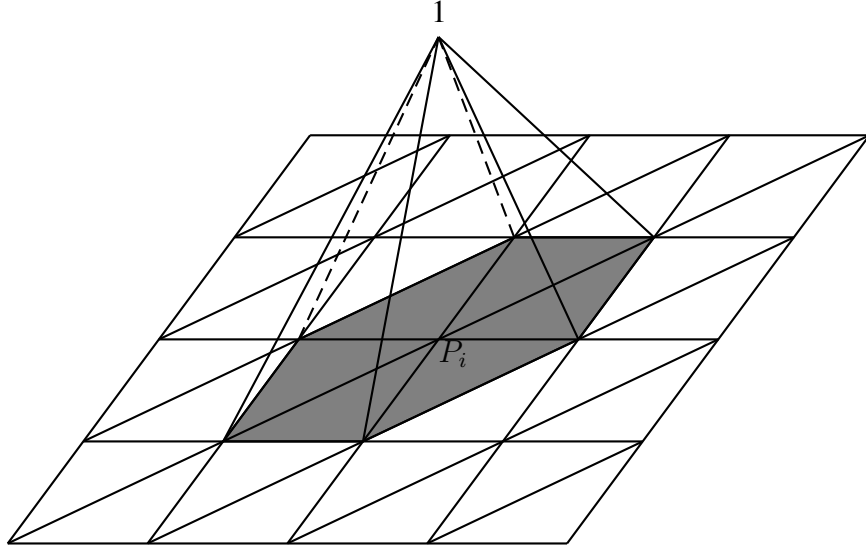


FIGURE B.15 – La fonction  $\phi_i$  et son support

ce qui montre que les composantes de  $v_h$  dans cette base coïncident avec ses degrés de liberté.

Remarquons que le support de la fonction  $\phi_i$  est uniquement constitué des éléments contenant le point  $P_i$  (voir figure B.15, dans le cas  $P^1$ , en dimension 2). Autrement dit les seules fonctions de base non nulles sur un élément  $K$  sont les fonctions associées aux degrés de liberté de l'élément  $K$ . Cette propriété va nous permettre de définir les fonctions de base élément par élément à partir de fonctions de base  $\hat{\phi}_i$  définies sur l'élément de référence  $\hat{K}$ .

Les fonctions de base  $\hat{\phi}_i$  sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_i(\hat{P}_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1.. \hat{N}_k \\ \hat{\phi}_i \in P^k(\hat{K}), \forall i = 1.. \hat{N}_k \end{array} \right.$$

En 1D, les fonctions de base  $P^1$  sont données par (voir Fig. B.16) :

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = 1 - \hat{x}$$

$$\hat{\phi}_2(\hat{x}) = \hat{x}$$

les fonctions de base  $P^2$  sont données par (voir Fig. B.17) :

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = 2(1 - \hat{x}) \left( \frac{1}{2} - \hat{x} \right)$$

$$\hat{\phi}_2(\hat{x}) = 2\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{\phi}_3(\hat{x}) = 4\hat{x}(1 - \hat{x})$$

et les fonctions de base  $P^3$  sont données par (voir Fig. B.18) :

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = \frac{9}{2}(1 - \hat{x}) \left( \frac{1}{3} - \hat{x} \right) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} \right)$$

$$\hat{\phi}_2(\hat{x}) = \frac{9}{2}\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) \left( \hat{x} - \frac{2}{3} \right)$$

$$\hat{\phi}_3(\hat{x}) = \frac{2}{27}\hat{x}(1 - \hat{x}) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} \right)$$

$$\hat{\phi}_4(\hat{x}) = \frac{2}{27}\hat{x}(1 - \hat{x}) \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right)$$

En 2D, les fonctions de base  $P^1$  sont données par :

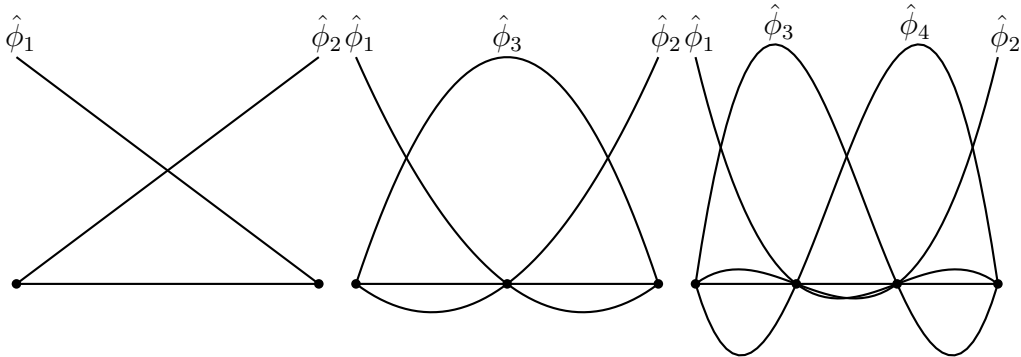


FIGURE B.16 –  $P_1$

FIGURE B.17 –  $P_2$

FIGURE B.18 –  $P_3$

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = (1 - \hat{x} - \hat{y})$$

$$\hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}$$

$$\hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}$$

les fonctions de base  $P^2$  sont données par :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= 2(1 - \hat{x} - \hat{y}) \left( \frac{1}{2} - \hat{x} - \hat{y} \right) & \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y}) \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= 2\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{2} \right) & \hat{\phi}_5(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{x}\hat{y} \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= 2\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{2} \right) & \hat{\phi}_6(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y})\end{aligned}$$

et les fonctions de base  $P^3$  sont données par :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{9}{2}(1 - \hat{x} - \hat{y}) \left( \frac{1}{3} - \hat{x} - \hat{y} \right) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} \right) & \hat{\phi}_6(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{2}{27}\hat{x}\hat{y} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{9}{2}\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) \left( \hat{x} - \frac{2}{3} \right) & \hat{\phi}_7(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{2}{27}\hat{x}\hat{y} \left( \frac{1}{3} - \hat{y} \right) \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{9}{2}\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{3} \right) \left( \hat{y} - \frac{2}{3} \right) & \hat{\phi}_8(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{2}{27}\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{3} \right) (1 - \hat{x} - \hat{y}) \\ \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{2}{27}\hat{x} (1 - \hat{x} - \hat{y}) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} \right) & \hat{\phi}_9(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{2}{27}\hat{y} (1 - \hat{x} - \hat{y}) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} \right) \\ \hat{\phi}_5(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{2}{27}\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) (1 - \hat{x} - \hat{y}) & \hat{\phi}_{10}(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{27}\hat{x}\hat{y} (1 - \hat{x} - \hat{y})\end{aligned}$$

En 3D, les fonctions de base  $P^1$  sont données par :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= (1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x} \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{y} \\ \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{z}\end{aligned}$$

les fonctions de base  $P^2$  sont données par :

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \left( \frac{1}{2} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} \right) & \hat{\phi}_5(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \\
\hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{2} \right) & \hat{\phi}_6(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{x}\hat{y} \\
\hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{2} \right) & \hat{\phi}_7(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \\
\hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2\hat{z} \left( \hat{z} - \frac{1}{2} \right) & \hat{\phi}_8(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \\
& & \hat{\phi}_9(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{x}\hat{z} \\
& & \hat{\phi}_{10}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{y}\hat{z}.
\end{aligned}$$

Nous noterons  $\hat{N}p$ , le nombre de degrés de liberté sur l'élément de référence.

Les fonctions de base globales  $\phi_i$  sont alors définies à l'aide des fonctions  $F_K$  :

$$\begin{cases} \phi_{i|K} = \hat{\phi}_j \circ F_K^{-1}, \text{ avec } j \text{ tel que } i = lg_{j,K}, & \text{si } P_i \in K \\ \phi_{i|K} = 0 & \text{si } P_i \notin K \end{cases}$$

### B.2.3 Calcul de la matrice $M$

Intéressons-nous d'abord au calcul de la matrice  $M$  de terme général

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi_i \phi_j.$$

La première idée pour calculer cette matrice est, pour  $i$  et  $j$  fixés, de parcourir l'ensemble des éléments de  $\mathcal{T}_h$  :

- pour  $i = 1, NP_h$ 
  - pour  $j = 1, NP_h$ 
    - $M(i, j) = 0$
  - pour  $l = 1, NT_h$

- si  $P_i \in K_l$  et  $P_j \in K_l$  alors
  - $M(i, j) = M(i, j) + \int_{K_l} \phi_i \phi_j$
  - *finsi*
- *finpour*

- *finpour*

Cet algorithme présente plusieurs inconvénients :

1. il faut parcourir trois boucles de grande taille :  $NP_h \times NP_h \times NT_h$  ;
2. il faut à chaque fois savoir si les degrés de liberté  $P_i$  et  $P_j$  appartiennent à  $K_l$  ;
3. le calcul de  $\int_{K_l} \phi_i \phi_j$  n'est pas simple à implémenter.

Remarquons tout d'abord, que si  $P_i$  et  $P_j$  appartiennent à l'élément  $K$ , alors il existe deux degrés de liberté  $\hat{P}_I$  et  $\hat{P}_J$  sur l'élément de référence  $\hat{K}$  tels que  $lg_{K,I} = i$  et  $lg_{K,J} = j$  et

$$\int_K \phi_i \phi_j = \int_K \hat{\phi}_I \circ F_K^{-1} \hat{\phi}_J \circ F_K^{-1} = \int_{\hat{K}} |\det J_{F_K}| \hat{\phi}_I \hat{\phi}_J = |\det A_K| \int_{\hat{K}} \hat{\phi}_I \hat{\phi}_J$$

Le calcul de  $\int_K \phi_i \phi_j$  se déduit donc simplement du calcul de la matrice  $\hat{M}$  de terme général  $\hat{M}_{i,j} = \int_{\hat{K}} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j$  et nous utiliserons l'algorithme de calcul suivant :

- *pour*  $i = 1.. \hat{N}_p$ 
  - *pour*  $j = 1.. \hat{N}_p$ 
    - $\hat{M}(i, j) = \int_{\hat{K}} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j$
  - *finpour*
- *finpour*
- $M=0$
- *pour*  $l = 1.. NT_h$ 
  - Calcul de  $|\det A_{K_l}|$
  - *pour*  $I = 1.. \hat{N}_p$ 
    - *pour*  $J = 1.. \hat{N}_p$ 
      - $i=lg(1,I), j=lg(1,J)$
      - $M(i, j) = M(i, j) + |\det A_{K_l}| \hat{M}(I, J)$
    - *finpour*
  - *finpour*
- *finpour*



- *finpour*

Ce nouvel algorithme a plusieurs avantages :

1. il suffit de calculer les intégrales une fois sur l'élément de référence ;
2. on ne parcourt que les degrés de liberté nécessaires au calcul de  $M$ , il n'y a que  $NT_h \times \hat{N}_p \times \hat{N}_p$  itérations ;
3. on déduit facilement la numérotation globale à partir de la numérotation locale grâce à la fonction  $lg$ .

## B.2.4 Calcul de la matrice $K$

Comme pour le calcul de  $M$ , nous décomposons l'intégrale sur  $\Omega$  en une somme d'intégrales sur les éléments

$$K_{i,j} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c^2(K) \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c^2(K) \int_K \nabla \phi_i^T \nabla \phi_j.$$

Pour le calcul de  $\int_K \nabla \phi_i^T \nabla \phi_j$  nous utiliserons à nouveau le fait que, si  $P_i$  et  $P_j$  appartiennent à l'élément  $K$ , alors

$$\phi_{i|K} = \hat{\phi}_I \circ F_K^{-1} \text{ et } \phi_{j|K} = \hat{\phi}_J \circ F_K^{-1}$$

avec  $I$  et  $J$  tels que  $lg_{K,I} = i$  et  $lg_{K,J} = j$ . Nous en déduisons les relations

$$\nabla \phi_{i|K} = J_{F_K}^{-T} \nabla \hat{\phi}_I \circ F_K^{-1} \text{ et } \nabla \phi_{j|K} = J_{F_K}^{-T} \nabla \hat{\phi}_J \circ F_K^{-1}$$

puis,

$$\int_K \nabla \phi_i^T \nabla \phi_j = \int_K (A_K^{-T} \nabla \hat{\phi}_I \circ F_K^{-1})^T A_K^{-T} \nabla \hat{\phi}_J \circ F_K^{-1} = |\det A_K| \int_{\hat{K}} \nabla \hat{\phi}_I^T A_K^{-1} A_K^{-T} \nabla \hat{\phi}_J.$$

Contrairement à ce nous avons obtenu pour le calcul de  $M$ , l'intégrale sur l'élément de référence dépend de l'élément  $K$  (à cause de la matrice  $A_K^{-1} A_K^{-T}$ ). Cependant, en posant  $C^K = A_K^{-1} A_K^{-T}$ , on vérifie facilement que, en dimension 2,

$$\nabla \hat{\phi}_I^T A_K^{-1} A_K^{-T} \nabla \hat{\phi}_J = C_{1,1}^K \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial x} + C_{1,2}^K \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial x} \right) + C_{2,2}^K \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial y}$$

(on obtient un résultat similaire en dimension 3). On a alors

$$\int_K \nabla \phi_i^T \nabla \phi_j = |\det A_K| \left( C_{1,1}^K \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial x} + C_{1,2}^K \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial x} \right) + C_{2,2}^K \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial y} \right).$$

La matrice  $K$  peut donc être calculée à partir des trois matrices locales  $\hat{K}_{xx}$ ,  $\hat{K}_{xy}$  et  $\hat{K}_{yy}$  de termes généraux respectifs

$$\int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial x}, \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial x} \right) \text{ et } \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial y}$$

et nous utiliserons l'algorithme de calcul suivant :

- pour  $i = 1..\hat{N}_p$ 
  - pour  $j = 1..\hat{N}_p$ 
    - $\hat{K}_{xx}(i, j) = \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial x}$
    - $\hat{K}_{xy}(i, j) = \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial x} \right)$
    - $\hat{K}_{yy}(i, j) = \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial y}$
  - *finpour*
- *finpour*
- $K=0$
- pour  $l = 1..NT_h$ 
  - Calcul de  $|\det A_{K_l}|$  et  $C^{K_l}$
  - pour  $I = 1..\hat{N}_p$ 
    - pour  $J = 1..\hat{N}_p$ 
      - $i=\lg(1,I), j=\lg(1,J)$
      - $K(i, j) = K(i, j) + c^2(K) |\det A_{K_l}| C^{K_l}(1, 1) K_{xx}(I, J)$
      - $K(i, j) = K(i, j) + c^2(K) |\det A_{K_l}| C^{K_l}(1, 2) K_{xy}(I, J)$
      - $K(i, j) = K(i, j) + c^2(K) |\det A_{K_l}| C^{K_l}(2, 2) K_{yy}(I, J)$
    - *finpour*
  - *finpour*
- *finpour*

## B.2.5 Calcul de la matrice $B$

$$B_{i,j} = \int_{\Gamma_a} c^2(x) \phi_i \phi_j = \sum_{F \in \Gamma_h} c^2(F) \int_F \phi_i \phi_j$$

Si  $P_i$  et  $P_j$  appartiennent à la face  $F$ , alors

$$\phi_{i|F} = \hat{\phi}_I \circ G_F^{-1} \text{ et } \phi_{j|F} = \hat{\phi}_J \circ G_F^{-1}$$

avec  $I$  et  $J$  tels que  $l g f_{F,I} = i$  et  $l g f_{F,J} = j$ . On a alors

$$\int_F \phi_i \phi_j = \int_F (\hat{\phi}_I \hat{\phi}_J) \circ G_F^{-1}.$$

Rappelons que

$$\int_F f \circ G_F^{-1} = \int_{\hat{F}} \|G'_F\| f \text{ (en 2D) et } \int_F f \circ G_F^{-1} = \int_{\hat{F}} \left\| \frac{\partial G_F}{\partial \hat{x}} \wedge \frac{\partial G_F}{\partial \hat{y}} \right\| f \text{ (en 3D)}.$$

On a donc

$$\int_F \phi_i \phi_j = \left\| \begin{array}{c} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{array} \right\| \int_{\hat{F}} \hat{\phi}_I \hat{\phi}_J \text{ (en 2D) et } \int_F \phi_i \phi_j = \left\| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & \wedge \quad y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{array} \right\| \int_{\hat{F}} \hat{\phi}_I \hat{\phi}_J \text{ (en 3D)}$$

et nous utiliserons l'algorithme de calcul suivant :

- pour  $i = 1.. \hat{N}_p$ 
  - pour  $j = 1.. \hat{N}_p$ 
    - $\hat{B}(i, j) = \int_{\hat{F}} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j$
  - finpour
- finpour
- $K=0$
- pour  $l = 1.. NF_h$

- Calcul de  $n = \left\| \begin{array}{c} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{array} \right\|$  ou  $n = \left\| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & \wedge \quad y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{array} \right\|$

- *pour*  $I = 1..{\hat{N}}_p^F$ 
  - *pour*  $J = 1..{\hat{N}}_p^F$ 
    - $i=\text{lgf}(1,I), j=\text{lgf}(1,J)$
    - $B(i, j) = B(i, j) + c^2(F)n\hat{B}(I, J)$
  - *finpour*
- *finpour*