

Fonctions de plusieurs variables

Sébastien Tordeux

22 février 2009

Table des matières

1 Fonctions de plusieurs variables	3
1.1 Définition	3
1.2 Limite et continuité	4
1.2.1 Fermeture	4
1.2.2 Limite	4
1.2.3 Continuité	7
1.3 Dérivation d'une fonction de plusieurs variables à valeurs dans \mathbb{R}	8
1.3.1 Intérieur	8
1.3.2 Dérivées partielles et gradient d'une fonction à valeurs réelles	8
1.3.3 Formule de Taylor d'ordre 1 et différentiabilité	9
1.3.4 Condition nécessaire d'optimalité d'ordre 1	11
1.3.5 Directions de montée et de descente	13
1.3.6 normale et isovaleur	14
1.4 Dérivation d'une fonction de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p, p > 1$	14
1.4.1 Jacobienne	14
1.4.2 Formule de Taylor d'ordre 1	15
1.4.3 Composition de fonctions	15
1.4.4 Inverse d'une fonction	16
1.5 Dérivation d'ordre deux d'une fonction de plusieurs variables à valeurs dans \mathbb{R}	17
1.5.1 Dérivées partielles d'ordre deux	17
1.5.2 Formule de Taylor d'ordre deux	17
1.5.3 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité d'ordre deux	18
2 Transformée de Laplace	20
2.1 Rappel sur la résolution des EDO	20

2.1.1	EDO linéaires à coefficients constants d'ordre un . . .	20
2.1.2	EDO linéaires à coefficients constants d'ordre deux . .	22
2.2	Définition et premières applications	24
2.2.1	Définition	24
2.2.2	Transformée des transformations usuelles	25
2.2.3	Domaine de définition	25
2.2.4	Dérivation et transformée de laplace	26
2.2.5	Multiplication par $\exp(bt)$	27
2.2.6	Injectivité de la transformée de Laplace	27
2.3	Application à la résolution de EDO	27
2.3.1	EDO d'ordre 1	27
2.3.2	EDO d'ordre 2	28
3	Intégration des fonctions de plusieurs variables	31
3.1	Intégration d'une fonction de plusieurs variables	31
3.1.1	Le cas de la dimension 2	31
3.1.2	Le cas de la dimension 3	32
3.1.3	Changement de variables et intégration	32
3.2	Intégration sur les variétés de \mathbb{R}^n pour $n = 2$ et $n = 3$	34
3.2.1	Intégration sur une courbe paramétrée de \mathbb{R}^n	34
3.2.2	Intégration sur une surface paramétrée de \mathbb{R}^3	35
4	Analyse vectorielle et intégration	37
4.1	Opérateurs divergence et rotationnel et laplacien	37
4.2	Théorème de la divergence ou de Green-Ostrogradsky	38
4.3	Théorème du rotationnel ou de Stokes	39

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

1.1 Définition

Une fonction de plusieurs variables est une application

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad (1.1)$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. On dit que l'ensemble D_f est le domaine de définition de f .

Exemples.

- pour $p = 1$ et $n = 1$: toutes les fonctions.
- pour $p = 1$ et $n = 2$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 \\ f(x, y) &= \sin(x)\cos(y)/x^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

- pour $p = 1$ et n quelconque :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \|\mathbf{x}\| && \text{avec } \|\cdot\| \text{ une norme,} \\ f(\mathbf{x}) &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} && \text{avec } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n. \\ f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \cdot (M\mathbf{x}) && \text{avec } M \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

- pour p et n quelconques :

$$f(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} \text{ avec } M \in \mathbb{R}^{p \times n}. \quad (1.4)$$

Lorsque $p \neq 1$, on peut représenter $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ à l'aide de p fonctions $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, chaque fonction prenant en charge une coordonnée

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x})). \quad (1.5)$$

L'objectif du chapitre est d'apprendre à

- approcher une fonction localement,
- dériver une fonction,
- trouver un minimum et un maximum local sur \mathbb{R}^n .

1.2 Limite et continuité

1.2.1 Fermeture

Nous considérons une fonction $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Comme une fonction de la droite réelle, il est souvent possible de parler de la limite de f en des points qui n'appartiennent pas à D_f (pour $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ on définit la notion de limite en 0 et 1). Nous introduisons donc le plus grand ensemble de \mathbb{R}^n sur lequel il est possible de parler de limite.

Définition 1.2.1. *La fermeture \bar{D} de $D \subset \mathbb{R}^n$ est le sous-ensemble de \mathbb{R}^n des limites des suites convergentes de D*

$$\mathbf{x}_0 \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^n \text{ ssi } \exists (\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec } \mathbf{x}_n \in D \text{ et } \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad (1.6)$$

On a en fait "fermer" D en y ajoutant les limites des suites de D . En effet, on a la proposition :

Proposition 1.2.1. *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$. On a $D \subset \bar{D}$.*

Preuve. Soit $\mathbf{x}_0 \in D$. Il suffit de montrer que $\mathbf{x}_0 \in \bar{D}$. On considère la suite constante $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ qui est bien une suite de D qui converge vers \mathbf{x}_0 .

1.2.2 Limite

On a alors tous les éléments pour définir les limites de $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ en $\mathbf{x} \in \bar{D}$.

Définition 1.2.2. *La fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ admet la limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ en $\mathbf{x} \in \bar{D}$ ssi on a (i) ou (ii) ou (iii).*

(i) *Pour toute suite $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers \mathbf{x} on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}_n) = \ell. \quad (1.7)$$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$y \in \mathbf{D} \text{ et } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \eta \implies \|f(\mathbf{y}) - \ell\| \leq \varepsilon. \quad (1.8)$$

(iii) il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \text{ et } \|f(\mathbf{y}) - \ell\| \leq g(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) \quad (1.9)$$

On note alors

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y}) = \ell. \quad (1.10)$$

Remarque 1.2.1. Les trois définitions de la limite (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

– Montrons (i) \implies (ii). On raisonne par l'absurde si (ii) n'était pas réalisée

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \eta > 0 \exists \mathbf{y} \in \mathbf{D} : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \eta \text{ et } \|f(\mathbf{y}) - \ell\| > \varepsilon. \quad (1.11)$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($\eta = 1/(n+1)$), il existe $x_n \in \mathbf{D}$ tel que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \leq 1/(n+1)$ et $\|f(\mathbf{x}_n) - \ell\| > \varepsilon > 0$. Cette suite (\mathbf{x}_n) converge vers \mathbf{x} sans que $f(\mathbf{x}_n)$ converge vers ℓ , impossible.

– Montrons (ii) \implies (iii). Il suffit de définir une fonction g ayant les bonnes propriétés. Soit g définie par $g(0) = 0$ et pour t strictement positif

$$g(t) = \sup_{\mathbf{z} \in \mathbf{D} : \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leq t} \|f(\mathbf{z}) - \ell\| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}. \quad (1.12)$$

Montrons que g tend vers 0 en 0. L'ensemble sur lequel est évalué le supremum croît avec t . Par conséquent, cette fonction est croissante

$$\forall t \in [0, \eta] \quad 0 \leq g(t) \leq g(\eta). \quad (1.13)$$

Remarquons que d'après (ii), on a

$$g(\eta) = \sup_{\mathbf{y} \in \mathbf{D} : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \eta} \|f(\mathbf{y}) - \ell\| \leq \varepsilon. \quad (1.14)$$

Par conséquent, il suit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 : \forall t \in [0, \eta] \quad 0 \leq g(t) \leq \varepsilon. \quad (1.15)$$

C'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0. \quad (1.16)$$

D'autre part, comme pour tout $\mathbf{y} \in \mathbf{D}$, $\mathbf{y} \in \{\mathbf{z} \in \mathbf{D} : \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|\}$, on a

$$\|f(\mathbf{y}) - \ell\| \leq g(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|). \quad (1.17)$$

– Montrons (iii) \Rightarrow (i). Considérons une suite quelconque $(\mathbf{x}_n \in D)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers \mathbf{x} . D’après (iii), on a

$$\|f(\mathbf{x}_n) - \ell\| \leq g(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|). \quad (1.18)$$

En faisant tendre n vers l’infini, il suit que $f(x_n)$ converge vers ℓ et par conséquent (i).

Nous donnons alors quelques propriétés essentielles de la limite qui sont des conséquences directes de (i).

Proposition 1.2.2. *La limite de $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ en $\mathbf{x} \in \bar{D}$ est unique quand elle existe.*

Proposition 1.2.3. *Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}^{m \times p}$ et $\mathbf{x} \in \bar{D}$. Si*

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y}) = \ell_f, \quad \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} g(\mathbf{y}) = \ell_g, \quad (1.19)$$

alors on a

$$\begin{cases} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) = \ell_f + \ell_g, \\ \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} Mf(\mathbf{y}) = M\ell_f, \\ \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \lambda f(\mathbf{y}) = \lambda \ell_f. \end{cases} \quad (1.20)$$

Proposition 1.2.4. *Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{x} \in \bar{D}$. Si*

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y}) = \ell_f, \quad \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} g(\mathbf{y}) = \ell_g, \quad (1.21)$$

alors on a

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}) = \ell_f \ell_g. \quad (1.22)$$

Proposition 1.2.5. *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et pour $i \in [1; p]$ $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ vérifiant*

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}); \dots; f_p(\mathbf{x})). \quad (1.23)$$

On a alors

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y}) = \ell \iff \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f_i(\mathbf{y}) = \ell_i \quad \forall i \in [1; p]. \quad (1.24)$$

Proposition 1.2.6. *Soient $\varphi : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n$, $f : B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\mathbf{x}_0 \in \bar{A}$. Si*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 \quad \text{et} \quad \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} f(\mathbf{y}) = \ell \quad (1.25)$$

alors on a

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\varphi(\mathbf{x})) = \ell. \quad (1.26)$$

1.2.3 Continuité

Passons maintenant à la notion de continuité. Cette notion généralise la notion de continuité des fonctions de la droite réelle.

Définition 1.2.3. *La fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est continue en $\mathbf{x} \in D$ ssi*

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}). \quad (1.27)$$

On peut alors traduire les trois dernières propositions en terme de continuité.

Proposition 1.2.7. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, sont continues alors $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \mapsto \lambda f(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x} \mapsto Mf(\mathbf{x})$ sont continues*

Proposition 1.2.8. *Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues alors la fonction $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ définie sur D est continue.*

Proposition 1.2.9. *Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ vérifiant*

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}); \dots; f_p(\mathbf{x})). \quad (1.28)$$

La fonction f est continue ssi tous les f_i sont continues.

Proposition 1.2.10. *Si $\varphi : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ et $f : B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ sont continues alors $\mathbf{x} \mapsto f(\varphi(\mathbf{x}))$ définie sur A est continue.*

La proposition suivante est fondamentale pour montrer qu'une fonction définie par une formule est continue.

Proposition 1.2.11. *Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. L'application coordonnée*

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_i \quad (1.29)$$

est continue.

preuve. Il nous suffit de remarquer que d'après (i)

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i. \quad (1.30)$$

Remarque 1.2.2. *La notion de limite est parfois surprenante. Bien qu'elle soit en général aisée à utiliser il faut prendre garde aux raisonnements hâtifs. En effet, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(0, 0) = 0 \text{ et } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (1.31)$$

vérifie

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 \text{ et } \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0. \quad (1.32)$$

Pourtant cette fonction n'admet pas de limite en $(0, 0)$. Pour $\mathbf{x}_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$, on a

$$f(\mathbf{x}_n) = \frac{1}{2} \neq 0. \quad (1.33)$$

1.3 Dérivation d'une fonction de plusieurs variables à valeurs dans \mathbb{R}

1.3.1 Intérieur

Pour pouvoir dériver une fonction en \mathbf{x} , il faut pouvoir considérer cette fonction dans un voisinage de \mathbf{x} . Nous introduisons ici la notion d'intérieur de D qui est l'ensemble des $\mathbf{x} \in D$ pour lesquels il existe un voisinage de \mathbf{x} qui est inclus dans D .

Définition 1.3.1. L'intérieur $\overset{\circ}{D}$ de D est défini par

$$\overset{\circ}{D} = \{\mathbf{x} \in D : \exists R > 0 : B(\mathbf{x}, R) \subset D\} \quad (1.34)$$

avec $B(\mathbf{x}, R)$ la boule ouverte de centre \mathbf{x} et de rayon R

$$B(\mathbf{x}, R) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < R\}. \quad (1.35)$$

Il suit de la définition que l'intérieur de D est un ensemble plus petit que D

$$\overset{\circ}{D} \subset D. \quad (1.36)$$

Dans la plupart des exemples $D = \mathbb{R}^n$ et l'intérieur de \mathbb{R}^n n'est rien d'autre que \mathbb{R}^n .

1.3.2 Dérivées partielles et gradient d'une fonction à valeurs réelles

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables et $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}$. La $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en $\mathbf{x} \in D$ est définie au choix comme (ces trois définitions sont bien entendu équivalentes)

(i) la limite suivante, quand elle existe,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} \quad (1.37)$$

avec $h \in \mathbb{R}$ et \mathbf{e}_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique.

(ii) la limite suivante, quand elle existe,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i + h, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) - f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n)}{h} \quad (1.38)$$

avec $h \in \mathbb{R}$.

(iii) la dérivée par rapport à t en \mathbf{x}_i de la fonction d'une variable

$$g(t) = f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, t, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (1.39)$$

On note aussi souvent

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_{\substack{\mathbf{x}_j = \text{cte} \\ j \neq i}}(\mathbf{x}) \quad (1.40)$$

Ceci signifie qu'une dérivée partielle peut être interprétée comme une dérivée suivant x_i aux x_j fixés ($i \neq j$).

Dans le cas où chacune des dérivées partielles est définie (la limite existe), on définit le gradient comme le vecteur colonne composé des dérivées partielles

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) \right)_{i \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Définition 1.3.2. Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ et $\overset{\circ}{D}$ son intérieur. Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{D}$ si chacune de ces dérivées partielles est définie et continue sur $\overset{\circ}{D}$.

1.3.3 Formule de Taylor d'ordre 1 et différentiabilité

Une des utilités du gradient est qu'il nous permet d'approcher une fonction localement par une fonction affine.

Proposition 1.3.1 (formule de Taylor d'ordre 1). Soient $D \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{D}$ son intérieur et $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}$. Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{D}$ alors la fonction $\varepsilon_{\mathbf{x}} : \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{h} + \mathbf{x} \in D\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = 0$ et

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \|\mathbf{h}\| \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) \quad (1.42)$$

vérifie

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = 0. \quad (1.43)$$

On peut comprendre (1.42) de la manière suivante : Une approximation d'ordre 1 de f au voisinage de \mathbf{x} est donnée par

$$f(\mathbf{y}) \simeq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (1.44)$$

Réciproquement, on dit qu'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}$ ssi on a (i) ou (ii).

(i) Il existe une forme linéaire $df_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon_{\mathbf{x}} : \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{h} + \mathbf{x} \in D\} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + df_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\| \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) \quad (1.45)$$

et

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = 0. \quad (1.46)$$

(ii) Il existe un vecteur $\nabla f_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon_{\mathbf{x}} : \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{h} + \mathbf{x} \in D\} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) \quad (1.47)$$

et

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = 0. \quad (1.48)$$

Remarque 1.3.1. Les deux définitions sont équivalentes car une forme linéaire est associée à un unique vecteur de \mathbb{R}^n ($df_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \nabla f_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{h}$).

Définition 1.3.3. On dit que df est la différentielle de f au point \mathbf{x} .

Proposition 1.3.2. Si f est différentiable en \mathbf{x} , le vecteur $\nabla f_{\mathbf{x}}$ n'est rien d'autre que le gradient de f au point \mathbf{x}

$$\nabla f_{\mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x}). \quad (1.49)$$

Preuve. Il suffit de montrer que la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) = (\nabla f_{\mathbf{x}})_i. \quad (1.50)$$

Pour $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_i$ avec $h \in \mathbb{R}$ et \mathbf{e}_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique, (1.47) et (1.48) s'écrivent

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} = \mathbf{e}_i \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \varepsilon(h) \quad (1.51)$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0. \quad (1.52)$$

En passant à la limite $h \rightarrow 0$, il suit

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i \cdot \nabla f_{\mathbf{x}} = (\nabla f_{\mathbf{x}})_i. \quad (1.53)$$

1.3.4 Condition nécessaire d'optimalité d'ordre 1

Une deuxième utilité du gradient est qu'il permet de trouver les minima et maxima locaux d'une fonction définie sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.3.4. Soient $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

– $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un argument-minimum local de f ssi il existe $R > 0$ tel que

$$\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, R) \quad f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) \quad (1.54)$$

avec $B(\mathbf{x}, R)$ la boule ouverte de centre \mathbf{x} et de rayon R

$$B(\mathbf{x}, R) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < R\}. \quad (1.55)$$

On dit alors que $f(\mathbf{x})$ est un minimum local de f

– $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un argument-maximum local de f ssi il existe $R > 0$ tel que

$$\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, R) \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}). \quad (1.56)$$

On dit alors que $f(\mathbf{x})$ est un maximum local de f .

– $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un argument-extremum local de f ssi \mathbf{x} est un argument-minimum local ou \mathbf{x} un argument-maximum local. On dit alors que $f(\mathbf{x})$ est un extremum local.

Proposition 1.3.3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Tout argument-extremum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ de f vérifie

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.57)$$

preuve.

– Soit \mathbf{x} un argument-minimum local. Pour tout \mathbf{h} tel que $\|\mathbf{h}\| < R$ on a

$$0 \leq f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{h}). \quad (1.58)$$

On applique la formule de Taylor en \mathbf{x} pour $\mathbf{h} = -h\nabla f(\mathbf{x})$ avec $h \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < h\|\nabla f(\mathbf{x})\| < R$.

$$0 \leq f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = -h\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + h\varepsilon(h). \quad (1.59)$$

On divise cette inégalité par $h > 0$ puis on passe à la limite $h \rightarrow 0^+$

$$0 \leq -\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \varepsilon(h) \implies 0 \leq -\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}). \quad (1.60)$$

On obtient donc

$$0 \leq -\|\nabla f(\mathbf{x})\|_2^2 \quad (1.61)$$

et par conséquent

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.62)$$

– Soit \mathbf{x} un argument-maximum local. Pour tout \mathbf{h} tel que $\|\mathbf{h}\| < R$ on a

$$0 \geq f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{h}). \quad (1.63)$$

On applique la formule de Taylor en \mathbf{x} pour $\mathbf{h} = h\nabla f(\mathbf{x})$ avec $h \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < h\|\nabla f(\mathbf{x})\| < R$.

$$0 \geq f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = h\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + h\varepsilon(h). \quad (1.64)$$

On divise cette inégalité par $h > 0$ puis on passe à la limite $h \rightarrow 0^+$

$$0 \geq \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \varepsilon(h) \implies 0 \geq \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}). \quad (1.65)$$

On obtient donc

$$0 \geq \|\nabla f(\mathbf{x})\|_2^2 \quad (1.66)$$

et par conséquent

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.67)$$

Définition 1.3.5. Soient $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

– $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un argument-minimum global de f ssi

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) \quad (1.68)$$

On dit alors que $f(\mathbf{x})$ est un minimum global de f

– $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un argument-maximum global de f ssi

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}). \quad (1.69)$$

On dit alors que $f(\mathbf{x})$ est un maximum local de f .

– $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un argument-extremum global de f ssi \mathbf{x} est un argument-minimum global ou \mathbf{x} un argument-maximum global. On dit alors que $f(\mathbf{x})$ est un extremum global.

1.3.5 Directions de montée et de descente

Définition 1.3.6. – On dit que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ monte (ou est croissante) dans la direction $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ssi la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$g(t) = f(\mathbf{x} + \mathbf{d}t) \quad (1.70)$$

est croissante en 0. On dit aussi que \mathbf{d} est une direction de montée en \mathbf{x} .

– On dit que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ descend (ou est décroissante) dans la direction $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ssi la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$g(t) = f(\mathbf{x} + \mathbf{d}t) \quad (1.71)$$

est décroissante en 0. On dit aussi que \mathbf{d} est une direction de descente en \mathbf{x} .

Proposition 1.3.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

- Si $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d} > 0$ alors $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ est une direction de montée en \mathbf{x} .
- Si $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d} < 0$ alors $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ est une direction de descente en \mathbf{x} .

Preuve. Il suffit de calculer la dérivée de g en 0 à l'aide de la formule de Taylor. Pour $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{d}) - f(\mathbf{x})}{h} \\ &= \frac{h\mathbf{d} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \|h\mathbf{d}\|\varepsilon(h\mathbf{d})}{h} \\ &= \mathbf{d} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \varepsilon(h), \end{aligned} \quad (1.72)$$

d'où $g'(0) = \mathbf{d} \cdot \nabla f(\mathbf{x})$. Ceci nous permet de conclure en discutant de la croissance ou de la décroissance de g en fonction du signe de g' en 0.

1.3.6 normale et isovaleur

Définition 1.3.7. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. On dit que $S \subset \mathbb{R}^n$ est une c -isovaleur de f ssi

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = c\}. \quad (1.73)$$

Définition 1.3.8. Un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est normal à $S \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{x} \in S$ ssi il existe $\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie pour tout $\mathbf{y} \in S$ et $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$

$$\mathbf{v} \cdot \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = \varepsilon(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \varepsilon(\mathbf{y}) = 0. \quad (1.74)$$

Proposition 1.3.5. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , $c \in \mathbb{R}$, S la c -isovaleur de f et $\mathbf{x} \in S \subset \mathbb{R}^n$. Le vecteur $\nabla f(\mathbf{x})$ est normal à S en \mathbf{x} .

Preuve. D'après la formule du développement de Taylor on a

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \varepsilon(\mathbf{y}) \quad (1.75)$$

avec $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui tend vers 0 quand \mathbf{y} tend vers \mathbf{x} . Il suffit alors de remarquer que si on se limite aux $\mathbf{y} \in S$ ($f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) = c$) on a

$$0 = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \varepsilon(\mathbf{y}) \quad (1.76)$$

et par conséquent

$$0 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{y}). \quad (1.77)$$

1.4 Dérivation d'une fonction de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p, p > 1$

1.4.1 Jacobienne

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de plusieurs variables dont les coordonnées sont représentées à l'aide de p fonctions

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (1.78)$$

La Jacobienne $J_f(\mathbf{x})$ de f au point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est la matrice formée des gradients des f_i rangés en ligne

$$J_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (\nabla f_1(\mathbf{x}))^T \\ (\nabla f_2(\mathbf{x}))^T \\ \dots \\ (\nabla f_p(\mathbf{x}))^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (1.79)$$

On dit de plus que f est de classe \mathcal{C}^1 ssi tous les f_i ($i = 1$ à p) sont de classe \mathcal{C}^1 ou de façon équivalente si $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x} \mapsto J(\mathbf{x})$ sont continues.

1.4.2 Formule de Taylor d'ordre 1

Théorème 1.4.1 (formule de Taylor d'ordre 1). Soient $D \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{D}$ son intérieur et $\mathbf{x} \in D$. Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{D}$ alors la fonction $\varepsilon_{\mathbf{x}} : \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{h} + \mathbf{x} \in D\} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $\varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = 0$ et

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + J_f(\mathbf{x})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) \quad (1.80)$$

vérifie

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = 0. \quad (1.81)$$

Preuve. On applique p fois la formule de Taylor à chacun des f_i

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f_1(\mathbf{x}) + (\nabla f_1(\mathbf{x}))^T \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \varepsilon_{1,\mathbf{x}}(\mathbf{h}), \\ f_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f_2(\mathbf{x}) + (\nabla f_2(\mathbf{x}))^T \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \varepsilon_{2,\mathbf{x}}(\mathbf{h}), \\ \dots \\ f_p(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f_p(\mathbf{x}) + (\nabla f_p(\mathbf{x}))^T \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \varepsilon_{p,\mathbf{x}}(\mathbf{h}). \end{cases} \quad (1.82)$$

La fonction $\varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = (\varepsilon_{1,\mathbf{x}}(\mathbf{h}), \varepsilon_{2,\mathbf{x}}(\mathbf{h}), \dots, \varepsilon_{p,\mathbf{x}}(\mathbf{h}))^T$ vérifie toutes les propriétés souhaitées.

1.4.3 Composition de fonctions

Rappelons que la composée $f \circ g$ de deux applications est définie à l'aide de la formule

$$f \circ g(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})). \quad (1.83)$$

Proposition 1.4.2 (Jacobienne de composition de fonctions).

Soient $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{D}_f$ son intérieur. Soient $D_g \subset \mathbb{R}^m$, $\overset{\circ}{D}_g$ son intérieur.

Soient $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{D}_f$ et $g : D_g \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{D}_g$.

La fonction $F = f \circ g$ définie par $F(\mathbf{x}) = f \circ g(\mathbf{x})$ est de classe \mathcal{C}^1 pour tout $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}_g$ tel que $\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{D}_f$ et

$$J_F(\mathbf{x}) = \underbrace{J_f(\mathbf{y})}_{\mathbb{R}^{p \times n}} \underbrace{J_g(\mathbf{x})}_{\mathbb{R}^{n \times m}}. \quad (1.84)$$

Ce n'est pas en général sous cette forme qu'apparaît cette règle de calcul mais sous la forme suivante connue sous le nom de règle de la chaîne

$$\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{y}_j}(\mathbf{y}) \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}) \text{ avec } \mathbf{y} = g(\mathbf{x}). \quad (1.85)$$

Il est alors courant et pratique de commettre les abus de notation suivants

$$\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{y}_j}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}) \text{ avec } \mathbf{y} = g(\mathbf{x}) \quad (1.86)$$

ou encore

$$\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{y}_j}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}) \text{ avec } \mathbf{y} = g(\mathbf{x}). \quad (1.87)$$

Ces deux dernières formules doivent être comprises au sens de (1.85)

1.4.4 Inverse d'une fonction

Soit $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow R_f \subset \mathbb{R}^n$ une fonction de plusieurs variables bijective. Rappelons que l'inverse $f^{-1} : R_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow D_f \subset \mathbb{R}^n$ de f est l'unique fonction qui vérifie

$$\mathbf{x} = f^{-1}(f(\mathbf{x})) \text{ et } \mathbf{y} = f(f^{-1}(\mathbf{y})). \quad (1.88)$$

On dit que f est un difféomorphisme ssi f et f^{-1} sont de classe \mathcal{C}^1 . On parle aussi de changement de variables.

Proposition 1.4.3. Si $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow R_f \subset \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme et $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}_f$ alors

$$J_{f^{-1}}(\mathbf{y}) = (J_f(\mathbf{x}))^{-1} \quad \text{avec } \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \quad (1.89)$$

1.5 Dérivation d'ordre deux d'une fonction de plusieurs variables à valeurs dans \mathbb{R}

1.5.1 Dérivées partielles d'ordre deux

Soient $f : D : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables et $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}$. Les n^2 dérivées partielles de f en $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}$ sont définies, quand elles existent, par la formule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) \right), \quad (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2. \quad (1.90)$$

La matrice hessienne est la matrice constituée des dérivées partielles d'ordre 2 de f

$$\begin{aligned} H_f(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) \right]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_n \partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_n \partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

On dit de plus qu'une fonction est de classe C^2 en $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}$ ssi f est de classe C^1 en \mathbf{x} et toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont continues en \mathbf{x} . Le théorème suivant affirme que, sous une hypothèse de régularité, l'on peut faire commuter les deux dérivées partielles .

Théorème 1.5.1 (Théorème de Schwarz). *Soient $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\overset{\circ}{D}_f$ et $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}_f$ alors*

(i) on a l'égalité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_j \partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}), \quad (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (1.92)$$

(ii) la matrice $H_f(\mathbf{x})$ est symétrique.

1.5.2 Formule de Taylor d'ordre deux

La formule de Taylor a notamment de l'importance car elle permet de calculer une approximation d'ordre 2 d'une fonction pour \mathbf{y} proche de \mathbf{x}

$$f(\mathbf{y}) \simeq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T H_f(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (1.93)$$

Plus précisément on a le résultat suivant

Théorème 1.5.2 (formule de Taylor d'ordre 2). Soient $D \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{D}$ son intérieur et $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}$. Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\overset{\circ}{D}$ alors la fonction $\varepsilon_{\mathbf{x}} : \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{h} + \mathbf{x} \in D\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = 0$ et

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{x}) \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|^2 \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) \quad (1.94)$$

vérifie

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = 0. \quad (1.95)$$

La deuxième utilité de cette formule est qu'elle permet souvent de calculer la matrice hessienne.

Théorème 1.5.3 (formule de Taylor d'ordre 2). Soient $D \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{D}$ son intérieur et $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{D}$. Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 et s'il existe un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, une matrice symétrique $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une fonction $\varepsilon_{\mathbf{x}} : \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{h} + \mathbf{x} \in D\} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $\varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = 0$,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|^2 \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) \quad (1.96)$$

et

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = 0 \quad (1.97)$$

alors

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad \text{et} \quad H_f(\mathbf{x}) = H. \quad (1.98)$$

1.5.3 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité d'ordre deux

La recherche d'argument-extremum local est facilitée par le calcul du gradient et de la matrice hessienne. En effet, on a les propositions suivantes :

Proposition 1.5.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables de classe \mathcal{C}^2 .

– Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un argument-minimum local de f alors

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad H_f(\mathbf{x}) \text{ est positive.} \quad (1.99)$$

– Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un argument-maximum local de f alors

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad H_f(\mathbf{x}) \text{ est négative.} \quad (1.100)$$

Preuve. Soient $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} \neq 0$, et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{d}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.101)$$

On calcule alors les dérivées partielles d'ordre 2 de g à l'aide de sa formule de Taylor

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\mathbf{x} + t\mathbf{d}) \\ &= f(\mathbf{x}) + t\mathbf{d} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(t\mathbf{d})^T H_f(\mathbf{x})(t\mathbf{d}) + \|t\mathbf{d}\|^2 \varepsilon(t\mathbf{d}) \\ &= g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g^{(2)}(0) + t^2\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (1.102)$$

d'où

$$g'(0) = \mathbf{d} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad g^{(2)}(0) = (\mathbf{d})^T H_f(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad (1.103)$$

– Si \mathbf{x} est un argument-minimum local de f alors 0 est un argument-minimum local de g . Par conséquent, $g'(0) = 0$ et $g^{(2)}(0) \geq 0$ c'est à dire

$$g'(0) = \mathbf{d} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad g^{(2)}(0) = (\mathbf{d})^T H_f(\mathbf{x})\mathbf{d} \geq 0 \quad (1.104)$$

Comme cette égalité est vraie pour n'importe quel \mathbf{d} , on a ainsi montrer que

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad H_f(\mathbf{x}) \text{ est positive.} \quad (1.105)$$

– Si \mathbf{x} est un argument-naximum local de f alors 0 est un argument-maximum local de g . Par conséquent, $g'(0) = 0$ et $g^{(2)}(0) \leq 0$ c'est à dire

$$g'(0) = \mathbf{d} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad g^{(2)}(0) = (\mathbf{d})^T H_f(\mathbf{x})\mathbf{d} \leq 0 \quad (1.106)$$

Comme cette égalité est vraie pour n'importe quel \mathbf{d} , on a ainsi montrer que

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad H_f(\mathbf{x}) \text{ est négative.} \quad (1.107)$$

Proposition 1.5.5. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables de classe \mathcal{C}^2 .

– Si

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad H_f(\mathbf{x}) \text{ est définie positive} \quad (1.108)$$

alors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un argument-minimum local de f .

– Si

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad H_f(\mathbf{x}) \text{ est définie négative} \quad (1.109)$$

alors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un argument-maximum local de f .

Chapitre 2

Transformée de Laplace

2.1 Rappel sur la résolution des EDO

2.1.1 EDO linéaires à coefficients constants d'ordre un

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, $y_0 \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. La résolution de l'EDO suivante

$$\begin{cases} \text{Chercher } y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ tel que :} \\ y'(t) + ay(t) = f(t) \quad \text{pour } t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

s'effectue en trois étapes

Etape 1. On recherche l'ensemble des solutions homogènes

$$y_H'(t) + ay_H(t) = 0 \quad (2.2)$$

sous la forme

$$y_H(t) = \exp(pt). \quad (2.3)$$

En injectant cette expression, il suit

$$(p + a) \exp(pt) = 0 \quad (2.4)$$

et on aboutit au polynôme caractéristique

$$p + a = 0. \quad (2.5)$$

Ainsi, l'ensemble des solutions homogènes de cette équation est donné par

$$y_H(t) = \alpha \exp(-at) \quad (2.6)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$ non fixé.

Etape 2. On recherche une solution particulière de l'EDO privée de sa condition initiale

$$y_p'(t) + ay_p(t) = f(t), \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (2.7)$$

méthode 1 : On recherche la solution particulière sous une forme bien précise. Nous en donnons ci-dessous les plus fréquentes :

$f(t)$	$y_p(t)$
t^n	$P(t)$ pour $a \neq 0$ $t P(t)$ pour $a = 0$
$\exp(bt)$	$A \exp(bt)$ pour $b \neq -a$ $A t \exp(bt)$ pour $b = -a$
$t^n \exp(bt)$	$P(t) \exp(bt)$ pour $b \neq -a$ $t P(t) \exp(bt)$ pour $b = -a$
$\cosh(\omega t)$ ou $\sinh(\omega t)$	$A \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)$ pour $\omega \neq \pm a$
$\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$	$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ pour $i\omega \neq \pm a$

avec

- P un polynôme de degré n
- A et B dans \mathbb{C} .

Méthode 2 : variation de la constante. On recherche la solution particulière sous la forme

$$y_p(t) = R(t) \exp(-at) \quad (2.8)$$

avec $R : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 . En injectant cette expression dans (2.7)

$$\begin{aligned} R'(t) \exp(-at) = f(t) &\implies R'(t) = f(t) \exp(at) \\ &\implies R(t) = R(0) + \int_0^t f(s) \exp(as) ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

On choisit (par exemple) alors la solution particulière vérifiant $R(0) = 0$

$$y_p(t) = \left(\int_0^t f(s) \exp(as) ds \right) \exp(-at). \quad (2.10)$$

Etape 3. La solution s'écrit comme une combinaison linéaire de la solution particulière et d'une solution homogène

$$y(t) = \alpha \exp(-at) + y_p(t). \quad (2.11)$$

On détermine α à l'aide de la condition initiale

$$\alpha = y_0 - y_p(0). \quad (2.12)$$

Remarque 2.1.1. *En physique, la plupart des modèles ne permettent pas l'existence de solutions exponentiellement croissantes. C'est pourquoi a est en général positif.*

2.1.2 EDO linéaires à coefficients constants d'ordre deux

Soit a et b deux réels et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^0 . Nous nous intéressons au problème suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ tel que} \\ y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), & \text{pour } t \geq 0, \\ y(0) = y_0 \text{ et } y'(0) = y_1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Etape 1 : détermination des solutions homogènes

$$y_H''(t) + ay_H'(t) + by_H(t) = 0, \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (2.14)$$

On recherche les racines p_1 et p_2 du polynôme caractéristique

$$p^2 + ap + b = 0. \quad (2.15)$$

Si $p_1 \neq p_2$ les solutions homogènes prennent la forme

$$y_H(t) = \alpha \exp(p_1 t) + \beta \exp(p_2 t), \quad \text{avec } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{C}. \quad (2.16)$$

Si $p_1 = p_2$ les solutions homogènes prennent la forme

$$y_H(t) = (\alpha + \beta t) \exp(p_1 t), \quad \text{avec } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{C}. \quad (2.17)$$

Etape 2 : Recherche d'une solution particulière. On cherche une solution de l'EDO privée de ces conditions initiales

$$y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = f(t), \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (2.18)$$

$f(t)$	$y_p(t)$
t^n	$P(t)$ pour p_1 et $p_2 \neq 0$ $t P(t)$ pour $p_1 = 0$ et $p_2 \neq 0$ $t^2 P(t)$ pour $p_1 = p_2 = 0$
$\exp(bt)$	$A \exp(bt)$ pour p_1 et $p_2 \neq b$ $t A \exp(bt)$ pour $p_1 = b$ et $p_2 \neq b$ $t^2 A \exp(bt)$ pour $p_1 = p_2 = b$
$t^n \exp(bt)$	$P(t) \exp(bt)$ pour p_1 et $p_2 \neq b$ $t P(t) \exp(bt)$ pour $p_1 = b$ et $p_2 \neq b$ $t^2 P(t) \exp(bt)$ pour $p_1 = p_2 = b$
$\cosh(\omega t)$ ou $\sinh(\omega t)$	$A \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)$ pour pour p_1 et $p_2 \neq \pm \omega$
$\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$	$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ pour pour p_1 et $p_2 \neq \pm i\omega$

avec

- P un polynôme de degré n
- A et B dans \mathbb{C} .

Etape 3. La solution s'écrit sous la forme si $p_1 \neq p_2$

$$y(t) = y_p(t) + \alpha \exp(p_1 t) + \beta \exp(p_2 t). \quad (2.19)$$

ou si $p_1 = p_2$

$$y(t) = y_p(t) + (\alpha + \beta t) \exp(p_1 t). \quad (2.20)$$

A l'aide des conditions initiales, on détermine $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} y(0) = y_p(0) + \alpha + \beta, \\ y'(0) = y'_p(0) + \alpha p_1 + \beta p_2, \end{cases} \quad \text{pour } p_1 \neq p_2, \quad (2.21)$$

ou

$$\begin{cases} y(0) = y_p(0) + \alpha, \\ y'(0) = y'_p(0) + \alpha p_1 + \beta, \end{cases} \quad \text{pour } p_1 = p_2. \quad (2.22)$$

Remarque 2.1.2. Dans les applications, on ne rencontre que rarement des solutions explosant en $+\infty$. On aura donc le plus souvent $\Re(p_1) \leq 0$ et $\Re(p_2) \leq 0$. Comme $a = -\lambda_1 - \lambda_2$ et $b = \lambda_1 \lambda_2$, on rentronne le plus souvent le cas $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

2.2 Définition et premières applications

2.2.1 Définition

On définit la transformée de Laplace (causale) d'une fonction

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C} \quad (2.23)$$

à l'aide de la formule

$$\widehat{f}(p) = \int_0^{+\infty} \exp(-pt) f(t) dt \quad (2.24)$$

sur le domaine

$$D_{\widehat{f}} = \left\{ p \in \mathbb{R}_+ : \exp(-pt) f(t) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[\right\}. \quad (2.25)$$

Définition 2.2.1. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dit que f est intégrable sur I ssi $|f|$ admet une intégrale convergente sur I .

2.2.2 Transformée des transformations usuelles

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Le tableau suivant fournit quelques transformées de Laplace de fonctions usuelles.

$f(t)$	$D_{\hat{f}}$	$\widehat{f}(p)$
t^n	$]0, +\infty[$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\exp at$	$]a, +\infty[$	$\frac{1}{p - a}$
$t^n \exp at$	$]a, +\infty[$	$\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$
$\exp [(a + ib)t]$	$]a, +\infty[$	$\frac{1}{p - (a + ib)}$
$t^n \exp [(a + ib)t]$	$]a, +\infty[$	$\frac{n!}{(p - (a + ib))^{n+1}}$
$\cosh (\omega t)$	$]\omega, +\infty[$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$\sinh (\omega t)$	$]\omega, +\infty[$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\cos (\omega t)$	$]0, +\infty[$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin (\omega t)$	$]0, +\infty[$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\exp(at) \cosh (\omega t)$	$]\omega + a, +\infty[$	$\frac{p - a}{(p - a)^2 - \omega^2}$
$\exp(at) \sinh (\omega t)$	$]\omega + a, +\infty[$	$\frac{\omega}{(p - a)^2 - \omega^2}$
$\exp(at) \cos (\omega t)$	$]a, +\infty[$	$\frac{p - a}{(p - a)^2 + \omega^2}$
$\exp(at) \sin (\omega t)$	$]a, +\infty[$	$\frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}$

(2.26)

2.2.3 Domaine de définition

Proposition 2.2.1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Si

$$|f(t)| \leq C \exp(at), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.27)$$

alors la transformée de Laplace de f est définie pour $p > a$, dit autrement,

$$]a, +\infty[\subset D_{\hat{f}}. \quad (2.28)$$

Preuve. Comme f est continue, il nous suffit de montrer que $f(t) \exp(-pt)$ admet une intégrale absolument convergente en $+\infty$ pour $p > a$. D'après (2.27), on a

$$|f(t) \exp(-pt)| \leq C \exp[(a-p)t] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.29)$$

Pour $p > a$, $a - p < 0$ et $C \exp[(a-p)t]$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Par conséquent, la transformée de Laplace est définie pour $p > a$.

Exercice. Vérifier tous les domaines de définition des transformées de Laplace précédentes

2.2.4 Dérivation et transformée de laplace

Proposition 2.2.2. Soient $a \in \mathbb{R}$, $C > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 vérifiant

$$|f(t)| \leq C \exp(at), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.30)$$

$$|f'(t)| \leq C \exp(at), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

On a $]a, +\infty[\subset D_{\hat{f}}$, et pour tout $p > a$

$$\hat{f}'(p) = p\hat{f}(p) - f(0). \quad (2.31)$$

preuve. La transformée de Laplace de f' est donnée par

$$\hat{f}'(p) = \int_0^{+\infty} \exp(-pt) f'(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \exp(-pt) f'(t) dt. \quad (2.32)$$

En intégrant par partie, il suit

$$\int_0^A \exp(-pt) f'(t) dt = \left[\exp(-pt) f(t) \right] + \int_0^A p \exp(-pt) f(t) dt. \quad (2.33)$$

Comme $\exp(-pt) f(t)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour $p > a$, on a par passage à la limite

$$\int_0^{+\infty} \exp(-pt) f'(t) dt = -f(0) + \int_0^{+\infty} p \exp(-pt) f(t) dt. \quad (2.34)$$

C'est le résultat souhaité.

Exercice. Calculer la transformée de Laplace de $t \mapsto t^n$

2.2.5 Multiplication par $\exp(bt)$

Proposition 2.2.3. Soit a et $b \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^0 qui vérifie

$$|f(t)| \leq C \exp(at), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.35)$$

On a $]a + b, +\infty[\subset D_{\widehat{\exp(bt)f(t)}}$ et pour tout $p > a + b$

$$\widehat{\exp(bt)f(t)} = \widehat{f}(p - b). \quad (2.36)$$

Preuve. On remarque tout d'abord que

$$|f(t) \exp(bt)| \leq C \exp(at) \exp(bt) \leq C \exp((a + b)t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.37)$$

La proposition 2.2.1 nous permet d'obtenir que $]a + b, +\infty[\subset D_{\widehat{\exp(bt)f(t)}}$. Il suffit alors de calculer la transformée de Laplace de $\exp(bt)f(t)$ pour $p > a + b$

$$\begin{aligned} \widehat{\exp(bt)f(t)} &= \int_0^{+\infty} \exp(-pt) \exp(bt) f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-(p - b)t) f(t) dt \\ &= \widehat{f}(p - b). \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.2.6 Injectivité de la transformée de Laplace

Sous certaines hypothèses de régularité et de décroissance de f à l'infini, la transformée de Laplace peut être inversée (on peut obtenir f à partir de \widehat{f}). Toutefois, nous ne traiterons pas ces questions dans le cadre de ce cours. Nous nous restreindrons ici à admettre le résultat suivant : Si $\widehat{f} \equiv \widehat{g}$ sur $]a, b[$ avec $a < b$ alors $f \equiv g$.

Dit autrement deux fonctions qui ont le même symbol de Laplace sont égales.

2.3 Application à la résolution de EDO

2.3.1 EDO d'ordre 1

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, $y_0 \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$ qui vérifie

$$|f(t)| \leq C \exp(\alpha t) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.39)$$

La résolution de l'EDO suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ tel que :} \\ y'(t) + ay(t) = f(t) \quad \text{pour } t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \\ \exists \beta \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq C \exp(\beta t). \end{array} \right. \quad (2.40)$$

La solution de ce problème se calcule en trois étapes :

1. on applique la transformée de Laplace à $y' + ay = f$ pour obtenir

$$p\hat{y}(p) + a\hat{y}(p) = y_0 + \hat{f}(p), \quad \forall p > \alpha \text{ et } p > \beta. \quad (2.41)$$

On a alors

$$\hat{y}(p) = \frac{y_0}{p+a} + \frac{\hat{f}(p)}{p+a}, \quad \forall p > \alpha \text{ et } p > \beta. \quad (2.42)$$

2. On détermine la fonction y_p dont la transformée de Laplace est

$$\frac{\hat{f}(p)}{p+a} \quad (2.43)$$

3. On détermine la fonction y_p dont la transformée de Laplace est

$$\frac{y_0}{p+a} \quad (2.44)$$

Cette fonction est

$$y_H(t) = y_0 \exp(-at). \quad (2.45)$$

La fonction y est alors donnée par

$$y(t) = y_p(t) + y_H(t). \quad (2.46)$$

2.3.2 EDO d'ordre 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ tel que :} \\ y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) \quad \text{pour } t \geq 0, \\ y(0) \text{ et } y'(0) \text{ donnés,} \\ \exists \beta \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq C \exp(\beta t) \text{ et } |f'(t)| \leq C \exp(\beta t). \end{array} \right. \quad (2.47)$$

1. On factorise le polynôme caractéristique de l'EDO sous la forme

$$(p + \alpha)^2 + \omega^2 \text{ ou } (p + \alpha)^2 - \omega^2 \quad (2.48)$$

2. On applique la transformée de Laplace à l'EDO et on obtient

$$(p^2 + ap + b) \widehat{y}(p) = y'(0) + (p + a)y(0) + \widehat{f}(p) \quad (2.49)$$

ou sous forme factorisé

$$[(p + \alpha)^2 + \omega^2] \widehat{y}(p) = y'(0) + (p + 2\alpha)y(0) + \widehat{f}(p) \quad (2.50)$$

ou

$$[(p + \alpha)^2 - \omega^2] \widehat{y}(p) = y'(0) + (p + 2\alpha)y(0) + \widehat{f}(p) \quad (2.51)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \widehat{y}(p) &= \frac{\omega}{[(p + \alpha)^2 + \omega^2]} \frac{y'(0) + \alpha y(0)}{\omega} \\ &+ \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} y(0) \\ &+ \frac{\widehat{f}(p)}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (2.52)$$

ou

$$\begin{aligned} \widehat{y}(p) &= \frac{\omega}{[(p + \alpha)^2 - \omega^2]} \frac{y'(0) + \alpha y(0)}{\omega} \\ &+ \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 - \omega^2} y(0) \\ &+ \frac{\widehat{f}(p)}{(p + \alpha)^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

3. On détermine la fonction $t \mapsto y_p(t)$ dont la transformée de Laplace est

$$\frac{\widehat{f}(p)}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}. \quad (2.54)$$

4. On remarque que la fonction dont la transformée de Laplace est

$$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} \text{ ou } \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 - \omega^2} \quad (2.55)$$

est donnée par

$$\cos(\omega t) \exp(-\alpha t) \text{ ou } \cosh(\omega t) \exp(-\alpha t) \quad (2.56)$$

et que la transformée de Laplace de

$$\sin(\omega t) \exp(-\alpha t) \text{ ou } \sinh(\omega t) \exp(-\alpha t) \quad (2.57)$$

est

$$\frac{\omega}{[(p + \alpha)^2 + \omega^2]} \text{ ou } \frac{\omega}{[(p + \alpha)^2 - \omega^2]} \quad (2.58)$$

5. Ainsi, la fonction y est donnée par la formule

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = \frac{y'(0) + \alpha y(0)}{\omega} \sin(\omega t) \exp(-\alpha t) \\ \quad + y(0) \cos(\omega t) \exp(-\alpha t) \\ \quad + y_p(t), \end{array} \right. \quad (2.59)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = \frac{y'(0) + \alpha y(0)}{\omega} \sinh(\omega t) \exp(-\alpha t) \\ \quad + y(0) \cosh(\omega t) \exp(-\alpha t) \\ \quad + y_p(t). \end{array} \right. \quad (2.60)$$

Chapitre 3

Intégration des fonctions de plusieurs variables

Nous ne donnons pas ici un exposé complet de l'intégration des fonctions de plusieurs variables mais seulement les règles de calcul qui s'avèrent utiles dans les applications.

3.1 Intégration d'une fonction de plusieurs variables

3.1.1 Le cas de la dimension 2

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale de f sur D quand elle existe peut être définie au choix par l'un des deux procédés suivants

1. On définit D_x comme l'ensemble des x parcourus lorsque $(x, y) \in D$

$$D_x = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \quad (x, y) \in D \right\}. \quad (3.1)$$

Puis à $x \in D_x$ fixé, on définit l'ensemble $D_y(x)$ des y parcourus par (x, y) pour $(x, y) \in D$

$$D_y(x) = \left\{ y \in \mathbb{R} : (x, y) \in D \right\}. \quad (3.2)$$

L'intégrale de f sur D est alors donnée par

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{D_x} \left(\int_{D_y(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (3.3)$$

2. On définit D_y

$$D_y = \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \quad (x, y) \in D \right\}, \quad (3.4)$$

puis $D_x(y)$

$$D_x(y) = \left\{ x \in \mathbb{R} : (x, y) \in D \right\} \quad (3.5)$$

et on définit l'intégrale par

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{D_y} \left(\int_{D_x(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (3.6)$$

3.1.2 Le cas de la dimension 3

Soient $D \subset \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Avec

$$D_x = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists (y, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) \in D \right\}, \quad (3.7)$$

$$D_y(x) = \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) \in D \right\}, \quad (3.8)$$

$$D_z(x, y) = \left\{ z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in D \right\}, \quad (3.9)$$

on définit l'intégrale de f sur D par

$$\int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{D_x} \left(\int_{D_y(x)} \left(\int_{D_z(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \quad (3.10)$$

2. On reproduit le procédé précédent en permutant x , y et z .

3.1.3 Changement de variables et intégration

Le théorème suivant nous permet de calculer une intégrale après changement de variables.

Théorème 3.1.1. *Pour $n = 2$ ou 3 , soit $\varphi : D_\varphi \subset \mathbb{R}^n \rightarrow R_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme. Soient $D \subset D_\varphi$ et \widehat{D} son image par φ . Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $\widehat{f} : \widehat{D} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $\widehat{f}(y) = f(\varphi^{-1}(y))$. On a l'égalité suivante*

$$\int_D f(x) dx = \int_{\widehat{D}} \widehat{f}(y) |\det(J_{\varphi^{-1}}(y))| dy \quad (3.11)$$

avec $J_{\varphi^{-1}}$ la jacobienne de φ^{-1} .

On parle d'élément de volume pour $|\det(J_{\varphi^{-1}}(y))| dy$.

Exemple. Déterminer l'intégrale de $x^2 + y^2$ sur le disque $B(0, 1)$ de centre

0 et de rayon R . Nous utilisons les coordonnées polaires qui sont définies par les formules

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\theta), \\y &= r \sin(\theta).\end{aligned}\tag{3.12}$$

L'application qui à (x, y) fait correspondre (r, θ) est φ . Tandis que l'application qui à (r, θ) fait correspondre (x, y) est φ^{-1} . Calculons la jacobienne de φ^{-1} .

$$\begin{aligned}J_{\varphi^{-1}}(r, \theta) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

On a indentifié que cette jacobienne est le produit de deux matrices l'une orthogonale et l'autre diagonale. On peut alors facilement calculer son déterminant

$$|\det(J_{\varphi^{-1}}(r, \theta))| = r\tag{3.14}$$

L'élément de volume en coordonnées polaires est $rdrd\theta$.

On exprime alors $x^2 + y^2$ en fonction de r et θ

$$x^2 + y^2 = r^2.\tag{3.15}$$

On peut alors calculer l'intégrale

$$\int_{B(0,1)} x^2 + y^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^2 d\theta \right) r dr = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}.\tag{3.16}$$

Nous donnons maintenant quelques éléments de volume classiques

Coordonnées	Elements de volume
cartésiennes	$dx dy$ ou $dx dy dz$
polaires	$r dr d\theta$
sphériques	$r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$
cylindriques	$r dr d\theta dz$

3.2 Intégration sur les variétés de \mathbb{R}^n pour $n = 2$ et $n = 3$

3.2.1 Intégration sur une courbe paramétrée de \mathbb{R}^n

Soient $n = 2$ ou 3 , $I \subset \mathbb{R}$ et y une fonction d'une variable de classe \mathcal{C}^1 injective

$$y : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ t \longmapsto y(t). \end{cases} \quad (3.17)$$

On considère $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et la courbe \mathcal{C} définie par

$$\mathcal{C} = \{y(t) : t \in I\}. \quad (3.18)$$

Définition 3.2.1. *L'intégrale de f sur \mathcal{C} est définie par*

$$\int_{\mathcal{C}} f(x) dl = \int_I f(y(t)) \left\| \frac{dy}{dt}(t) \right\|_2 dt \quad (3.19)$$

avec $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne. Pour $\left\| \frac{dy}{dt}(t) \right\|_2 dt$ on parle d'élément de longueur de la courbe paramétrique \mathcal{C} .

Exemple : Intégration de y sur le cercle \mathcal{C} de centre 0 et de rayon r . On paramétrise ce cercle à l'aide de l'angle θ variant entre 0 et 2π .

$$\vec{x}(\theta) = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

On dérive \vec{x} par rapport à θ et on calcule sa norme

$$\frac{d\vec{x}}{d\theta}(\theta) = \begin{bmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix} \implies \left\| \frac{d\vec{x}}{d\theta}(\theta) \right\|_2 = r. \quad (3.21)$$

L'élément de longueur du cercle pour cette paramétrisation est $r d\theta$.

On exprime alors y à l'aide de r et θ

$$y = r \sin(\theta). \quad (3.22)$$

L'intégrale est donnée par

$$\int_{\mathcal{C}} y dl = \int_0^{2\pi} r \sin(\theta) r d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = 0. \quad (3.23)$$

Nous donnons maintenant quelques éléments de longueurs classiques

Courbe	Eléments de longueur
$n = 2, x = cte,$	dy
$n = 2, y = cte$	dx
$n = 2, r = cte$	$rd\theta$
$n = 3, x = cte, y = cte$	dz
$n = 3, x = cte, z = cte$	dy
$n = 3, y = cte, z = cte$	dx
$n = 3, \text{sphérique, } r = cte, \varphi = cte$	$rd\theta$
$n = 3, \text{sphérique, } r = cte, \theta = cte$	$r\sin(\theta)d\varphi$
$n = 3, \text{cylindriques, } r = cte, z = cte$	$rd\theta$

3.2.2 Intégration sur une surface paramétrée de \mathbb{R}^3

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ et y une application de classe \mathcal{C}^1 injective

$$y : \begin{cases} D & \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (t, u) & \longmapsto y(t, u). \end{cases} \quad (3.24)$$

On considère $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et la surface \mathcal{S} définie par

$$\mathcal{S} = \left\{ y(t, u) : (t, u) \in D \right\}. \quad (3.25)$$

Définition 3.2.2. *L'intégrale de f sur \mathcal{S} est définie par*

$$\int_{\mathcal{S}} f(x) dS = \int_D f(y(t)) \left\| \frac{dy}{dt}(t, u) \wedge \frac{dy}{du}(t, u) \right\|_2 dt du \quad (3.26)$$

avec $\| \cdot \|_2$ la norme euclidienne. On appelle $\left\| \frac{dy}{dt}(t, u) \wedge \frac{dy}{du}(t, u) \right\|_2 dt du$ l'élément de surface de la surface paramétrique \mathcal{S} .

Surface	Elements de surface
$x=cte$	$dydz$
$y=cte$	$dx dz$
$z=cte$	$dx dy$
d'une sphère	$r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$
partie latérale d'un cylindre	$r d\theta dz$
parties haute et basse d'un cylindre	$r dr d\theta$

Chapitre 4

Analyse vectorielle et intégration

Le but de ce chapitre est de donner une introduction de l'analyse vectorielle.

4.1 Opérateurs divergence et rotationnel et laplacien

Définition 4.1.1. – *Un champ de scalaires f est une application*

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto f(\vec{x}). \end{cases} \quad (4.1)$$

– *Un champ de vecteurs \vec{v} est une application*

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} & \longmapsto \vec{v}(\vec{x}). \end{cases} \quad (4.2)$$

On peut représenter un champ de vecteurs à l'aide de ses composantes

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Définition 4.1.2. *L'opérateur divergence associée à un champ de vecteurs de classe C^1 un champ de scalaires*

$$\operatorname{div}(\vec{v})(\vec{x}) = \frac{\partial v_x}{\partial x}(\vec{x}) + \frac{\partial v_y}{\partial y}(\vec{x}) + \frac{\partial v_z}{\partial z}(\vec{x}). \quad (4.4)$$

L'opérateur rotationnel associe à un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 un champ de vecteurs

$$\vec{\text{rot}}(\vec{v})(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y}(\vec{x}) - \frac{\partial v_y}{\partial z}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_x}{\partial z}(\vec{x}) - \frac{\partial v_z}{\partial x}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}(\vec{x}) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(\vec{x}) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

L'opérateur laplacien associe à un champ de scalaires de classe \mathcal{C}^2 un champ de scalaires

$$\Delta v(\vec{x}) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(\vec{x}). \quad (4.6)$$

L'opérateur laplacien vectoriel associe à un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^2 un champ de vecteurs

$$\vec{\Delta}\vec{v}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}(\vec{x}) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta v_x(\vec{x}) \\ \Delta v_y(\vec{x}) \\ \Delta v_z(\vec{x}) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Proposition 4.1.1. On a les égalités suivantes

$$\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}))(\vec{x}) = 0, \quad (4.8)$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(v))(\vec{x}) = 0, \quad (4.9)$$

$$\text{div}(\vec{\text{grad}}(v))(\vec{x}) = \Delta v(\vec{x}), \quad (4.10)$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}))(\vec{x}) - \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v}))(\vec{x}) = -\vec{\Delta}\vec{v}(\vec{x}). \quad (4.11)$$

4.2 Théorème de la divergence ou de Green-Ostrogradsky

Définition 4.2.1. Le flux d'un champ vecteur \vec{v} à travers une surface fermée S est définie par

$$\int_S \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(x) d\sigma \quad (4.12)$$

avec $\vec{n}(\vec{x})$ une normale à S orientée.

Théorème 4.2.1. Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un volume de \mathbb{R}^3 borné et ∂D son bord. Pour $\vec{x} \in \partial D$, soit $\vec{n}(\vec{x})$ la normale sortante à ∂D . Le flux sortant d'un champ de vecteurs à travers ∂D est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ de vecteurs sur D

$$\int_D \operatorname{div}(\vec{v})(\vec{x}) dx dy dz = \int_{\partial D} \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\sigma. \quad (4.13)$$

4.3 Théorème du rotationnel ou de Stokes

Définition 4.3.1. Soient $I \subset \mathbb{R}$ et \vec{y} une fonction de classe C^1 injective

$$\vec{y} : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ t \longmapsto \vec{y}(t). \end{cases} \quad (4.14)$$

On considère un champ de vecteur \vec{v} et la courbe \mathcal{C} définie par

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{y}(t) : t \in I \right\}. \quad (4.15)$$

La circulation de \vec{v} sur \mathcal{C} (orientée par y) est définie par

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{\ell} = \int_I \vec{v}(\vec{y}(t)) \cdot \frac{d\vec{y}}{dt}(t) dt. \quad (4.16)$$

Théorème 4.3.1. Soient S une surface de \mathbb{R}^3 et ∂S son bord

$$\int_S \operatorname{rot}(\vec{v})(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\sigma = \int_{\partial S} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{\ell} \quad (4.17)$$

avec S et ∂S convenablement orientés.