

Analyse UV 2 - Feuille 7

Exercice 1.

Soient f et g deux champs de scalaires de classe \mathcal{C}^2 . Soient \vec{u} et \vec{v} deux champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 .
Montrer que

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{v} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}), \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} - (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}. \quad (2)$$

$$\Delta(fg) = g\Delta f + \vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + f\Delta g, \quad (3)$$

Exercice 2.

Exprimer l'opérateur divergence en coordonnées cylindriques.

Exercice 3.

Déterminer un champ de vecteurs \vec{E} de classe \mathcal{C}^1 qui vérifie

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x(x) \vec{e}_x, \quad \vec{E}(-x, y, z) = -\vec{E}(x, y, z) \quad \text{et} \quad \text{div}\vec{E}(x, y, z) = \rho(x, y, z) \quad (4)$$

avec

$$\rho(x, y, z) = 1 - |x| \text{ si } |x| < 1 \quad \text{et} \quad \rho(x, y, z) = 0 \text{ si } |x| > 1. \quad (5)$$

Exercice 4.

Déterminer un champ de vecteurs \vec{E} de classe \mathcal{C}^1 qui vérifie

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_r(r) \vec{e}_r, \quad \text{et} \quad \text{div}\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \rho(r, \theta, \varphi) \quad (6)$$

avec

$$\rho(r, \theta, \varphi) = 1 - \frac{r^2}{R^2} \text{ si } r < R \quad \text{et} \quad \rho(r, \theta, \varphi) = 0 \text{ si } r > R. \quad (7)$$

Exercice 5.

Déterminer un champ de vecteurs \vec{B} de classe \mathcal{C}^1 qui vérifie

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B_r(r) \vec{e}_\theta, \quad \text{et} \quad \text{rot}\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{j}(r, \theta, z) \quad (8)$$

avec

$$\vec{j}(r, \theta, z) = r\vec{e}_z. \quad (9)$$