INSA-TOULOUSE
Département STPI
$2^{\text{ème}}$ année ICBE

Année 2008/2009

Analyse UV 2 - Feuille 2

Exercice 1.

1. Les fonctions suivantes sont-elles continues ?

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p && \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}^{p\times n}, \\
&\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} && (x,y) \mapsto \frac{\exp(x)}{x^2+y^2}, \\
&\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} && (x,y) \mapsto \frac{\sin(x+y)}{x+y}, \\
&\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 && (x,y) \mapsto \Big(\frac{\sin(x+y)}{x+y}, xy\Big), \\
&\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} && \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{x}) \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}^{n\times n}.
\end{aligned} \tag{1}$$

2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ déterminer le gradient de

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \frac{\exp(x)}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Exercice 2.

1. A l'aide de la formule de Taylor, calculer le gradient et la hessienne de

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} && \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{x}) && \text{avec } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ et symétrique}, \\
&\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} && \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{x}) && \text{avec } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ et non symétrique}, \\
&\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} && \mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}\cdot\mathbf{x} && \text{avec } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n}.
\end{aligned} \tag{3}$$

2. Calculer la jacobienne de

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}^{p\times n}, \tag{4}$$

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Déterminer le gradient de

$$g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{x} \longmapsto f(M\mathbf{x}) \tag{5}$$

en fonction de celui de f.

Exercice 4. (base cylindrique)

On considère le changement de variables

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\sin(\theta), \\ z &= z. \end{aligned} \tag{6}$$

1. Avec $\mathbf{x} = (x, y, z)$, déterminer les vecteurs unitaires
$$\mathsf{e}_r = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\right\|}, \quad \mathsf{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}\right\|}, \quad \mathsf{e}_z = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}\right\|}. \tag{7}$$
2. Montrer que
$$\mathbf{x} = r\mathsf{e}_r \tag{8}$$
3. Montrer que $(\mathsf{e}_r, \mathsf{e}_\theta, \mathsf{e}_z)$ est une base orthonormale
4. Calculer la jacobienne $J(\mathbf{x})$ de l'application $(r, \theta, z) \mapsto (x, y, z)$
5. En remarquant que
$$J(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\ \Lambda(\mathbf{x}) \tag{9}$$
avec A une matrice orthogonale et Λ une matrice diagonale, calculer la jacobienne de l'application $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$.
6. Calculer le gradient de f de classe $\mathcal{C}^1$ en coordonnées cartésiennes en fonction de $r,\ \frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{\partial f}{\partial \theta},\ \frac{\partial f}{\partial z},\ \mathsf{e}_r,\ \mathsf{e}_\theta,\ \mathsf{e}_z$.