INSA-TOULOUSE
Département STPI
2ème année ICBE

Analyse UV 2 - Feuille 4

Exercice 1.

Trouver la transformée de laplace de

$$f_1(t) = \cos(\omega t)\exp(bt),\ f_2(t) = \sin(\omega t)\exp(bt),\ f_3(t) = \mathrm{ch}(\omega t)\exp(bt),\ f_4(t) = \mathrm{sh}(\omega t)\exp(bt). \quad (1)$$

Correction. On exprime les différentes fonctions en fonction des exponentielles

$$\cos(\omega t) = \frac{\exp(i\omega t)+\exp(-i\omega t)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\omega t) = \frac{\exp(i\omega t)-\exp(-i\omega t)}{2i}. \quad (2)$$

$$\mathrm{ch}(\omega t) = \frac{\exp(\omega t)+\exp(-\omega t)}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(\omega t) = \frac{\exp(\omega t)-\exp(-\omega t)}{2}. \quad (3)$$

A l'aide de

$$\mathsf{D}_{\widehat{\exp(bt)}} =]\Re(b), +\infty[\quad \text{et} \quad \widehat{\exp(bt)} = \frac{1}{p-b} \quad (4)$$

on peut alors calculer leurs transformées de Laplace

$$\mathsf{D}_{\widehat{\cos(\omega t)}} =]0, +\infty[\quad \text{et} \quad \widehat{\cos(\omega t)} = \frac{1}{2}\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+i\omega} = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad (5)$$

$$\mathsf{D}_{\widehat{\sin(\omega t)}} =]0, +\infty[\quad \text{et} \quad \widehat{\sin(\omega t)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{2i}\frac{1}{p+i\omega} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad (6)$$

$$\mathsf{D}_{\widehat{\mathrm{ch}(\omega t)}} =]\omega, +\infty[\quad \text{et} \quad \widehat{\cos(\omega t)} = \frac{1}{2}\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+\omega} = \frac{p}{p^2-\omega^2}, \quad (7)$$

$$\mathsf{D}_{\widehat{\mathrm{sh}(\omega t)}} =]\omega, +\infty[\quad \text{et} \quad \widehat{\cos(\omega t)} = \frac{1}{2}\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+\omega} = \frac{\omega}{(p^2-\omega^2}. \quad (8)$$

On peut alors appliquer la formule $[\widehat{\exp(bt)f}(t)](p) = \widehat{f}(p-b)$

$$\mathsf{D}_{\widehat{f_1}} =]0, +\infty[\quad \text{et} \quad \widehat{f_1} = \frac{p-b}{(p-b)^2+\omega^2}, \quad (9)$$

$$\mathsf{D}_{\widehat{f_2}} =]0, +\infty[\quad \text{et} \quad \widehat{f_2} = \frac{\omega}{(p-b)^2+\omega^2}, \quad (10)$$

$$\mathsf{D}_{\widehat{f_3}} =]\omega, +\infty[\quad \text{et} \quad \widehat{f_3} = \frac{p-b}{(p-b)^2-\omega^2}, \quad (11)$$

$$\mathsf{D}_{\widehat{f_4}} =]\omega, +\infty[\quad \text{et} \quad \widehat{f_4} = \frac{\omega}{(p-b)^2-\omega^2}. \quad (12)$$

Exercice 2.

Trouver la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ qui vérifie} \\ y'(t) + y(t) = \exp(t), \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Correction. On applique la transformation de Laplace à l'EDO. Il suit

$$(p+1)\widehat{y}(p) = 1 + \frac{1}{p-1} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{y}(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p-1)(p+1)}. \tag{14}$$

Afin de se ramener aux transformations de Laplace usuelles, on effectue une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(p-1)(p+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{y}(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+1}. \tag{15}$$

En utilisant que $\widehat{exp(bt)} = \frac{1}{p-b}$, il suit

$$y(t) = \frac{1}{2}\exp(t) + \frac{1}{2}\exp(-t) = \mathrm{ch}(t). \tag{16}$$

Exercice 3.

Trouver la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ qui vérifie} \\ y'(t) + 2y(t) = \mathrm{ch}(2t), \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Correction. On applique la transformation de Laplace à l'EDO. Il suit

$$(p+2)\widehat{y}(p) = 1 + \frac{p}{p^2-4} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{y}(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{p}{(p+2)^2(p-2)}. \tag{18}$$

Afin de se ramener aux transformations de Laplace usuelles, on effectue une décomposition en éléments simples

$$\frac{p}{(p+2)^2(p-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(p+2)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{p+2} + \frac{1}{8}\frac{1}{p-2} \tag{19}$$

En utilisant que $\widehat{exp(bt)} = \frac{1}{p-b}$, il suit

$$y(t) = \frac{t}{2}\exp(-2t) + \frac{7}{8}\exp(-2t) + \frac{1}{8}\exp(2t). \tag{20}$$

Exercice 4.

Trouver la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ qui vérifie} \\ y^{(2)}(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Correction. On applique la transformation de Laplace à l'EDO. Il suit

$$(p^2 + 4p + 5)\widehat{y}(p) = p + 4 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{y}(p) = \frac{p+4}{p^2 + 4p + 5}. \tag{22}$$

On réduit alors cette fonction rationnelle.

$$\widehat{y}(p) = \frac{p}{(p+2)^2 + 1} = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 1} + \frac{2}{(p+2)^2 + 1}. \tag{23}$$

On identifie alors la solution

$$y(t) = \cos(t)\exp(-2t) + 2\sin(t)\exp(-2t). \tag{24}$$

Exercice 5.

Trouver la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ qui vérifie} \\ y^{(2)}(t) + 2y'(t) + y(t) = 1, \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Correction. On applique la transformation de Laplace à l'EDO. Il suit

$$(p^2 + 2p + 1)\widehat{y}(p) = \frac{1}{p} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{y}(p) = \frac{1}{p(p+1)^2}. \tag{26}$$

On réduit alors en éléments simples

$$\widehat{y}(p) = \frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1}. \tag{27}$$

On identifie alors la solution

$$y(t) = 1 - t\exp(-t) - \exp(-t). \tag{28}$$