INSA-TOULOUSE
Département STPI
2ème année ICBE

Analyse UV 2 - Feuille 3

Exercice 1.

Montrer que la fonction

$$f(x,y) \ = \ \text{ch}(x+y+3)\ (x^2+2x+2) \tag{1}$$

admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Correction. On recherche tout d'abord les points critiques c'est à dire les (x,y) qui vérifient $\partial_x f(x,y) = 0$ et $\partial_y f(x,y) = 0$.

$$\begin{aligned} &\partial_x f(x,y) = \text{ch}(x+y+3)\ (2x+2) + \text{sh}(x+y+3)\ (x^2+2x+2) = 0, \\ &\partial_y f(x,y) = \text{sh}(x+y+3)\ (x^2+2x+2) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Comme $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ est toujours strictement positif, il suit de la deuxième ligne $\text{sh}(x+y+3) = 0$ et par conséquent

$$x+y+3 = 0. \tag{3}$$

Pour $x+y+3 = 0$, la première ligne de (2) s'écrit $\text{ch}(x+y+3)\ (2x+2) = 0$. Comme $\text{ch}(x+y+3) > 0$, on obtient

$$2x+2 = 0. \tag{4}$$

On a donc obtenu qu'il n'y a qu'un point critique donné par $x = -1$ et $y = -2$. Vérifions que c'est un point de minimum global. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y) - f(-1,-2) = \text{ch}(x+y+3)\ (x^2+2x+2) - 1\cdot 1. \tag{5}$$

Comme $\text{ch}(x+y+3) \geq 1$ et $(x^2+2x+2) = (x+1)^2+1 \geq 1$, il suit

$$f(x,y) - f(-1,-2) \geq 0. \tag{6}$$

Le point $(-1,-2)$ est donc un point de minimum global.

Exercice 2.

On cherche à déterminer les arguments-minima de

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+2y^2+(z-y)^2+x+2y \end{array} \right. \tag{7}$$

sur l'ensemble

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x-z+y = 0\Big\} \tag{8}$$

1. En éliminant z, montrer que ce problème se réduit au problème de minimiser une fonction g sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que g admet un unique minimum local.

3. Montrer que ce minimum est global.
4. Conclure.

Correction.

1. On élimine $z = x + y$ pour obtenir la définition de g
$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 + x^2 + x + 2y = 2x^2 + 2y^2 + x + 2y \tag{9}$$
2. Calculons les points critiques de g
$$\partial_x g(x, y) = 4x + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \partial_y g(x, y) = 4y + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{4} \text{ et } y = -\frac{1}{2}. \tag{10}$$
On calcule d'autre part sa hessienne
$$H_g(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{11}$$
qui est symétrique définie positive pour tout (x, y) et donc aussi en $(-1/4, -1/2)$. Le point $(-1/4, -1/2)$ est donc un minimum local.
3. Il nous suffit de calculer pour tout (x, y)
$$\begin{aligned} g(x, y) - g(-1/4, -1/2) &= 2(x + 1/4)^2 - 1/8 + 2(y + 1/2)^2 - 1/2 + 5/8 \\ &= 2(x + 1/4)^2 + 2(y + 1/2)^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{12}$$
4. La fonction g admet un unique point de minimum global $(-1/4, -1/2)$. Le minimum de la fonction g est $5/8$.

Exercice 3.

Soit $R > 0$. Déterminer les normales extérieures et les deux vecteurs tangents unitaires à la sphère
$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\Big\}. \tag{13}$$
Correction. On introduit la fonction f dont la surface S est la R-isovaleur
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2. \tag{14}$$
Une normale à S est donnée par le gradient de f. Afin de faciliter le calcul nous utilisons les coordonnées sphériques
$$f(x, y, z) = r^2 \quad \Longrightarrow \quad \nabla f = 2r\mathsf{e}_r \tag{15}$$
On la normalise alors en sélectionnant la normale sortante
$$\mathbf{n} = \mathsf{e}_r. \tag{16}$$

Exercice 4.

Soit $R > 0$. Déterminer les normales extérieures et les deux vecteurs tangents unitaires au cylindre
$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\Big\}. \tag{17}$$
Correction. On utilise ici les coordonnées cylindriques et on remarque que la surface S est la R-isovaleur de $f(x, y, z) = r^2$. On calcule le gradient de f et on le normalise afin d'obtenir une normale à S.
$$\nabla f = 2r\mathsf{e}_r \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{n} = \mathsf{e}_r. \tag{18}$$
Il nous suffit alors de trouver deux vecteurs unitaires formant une base orthonormale avec e_r. Ils nous sont fournis par les deux vecteurs unitaires e_θ et e_z.

Exercice 5.

Déterminer l'ensemble des directions de descentes de

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \mathbf{x}_1. \end{array} \right. \tag{19}$$

Correction. Afin de connaître les directions de descente de f, on calcule son gradient.

$$\nabla f = \mathsf{e}_1. \tag{20}$$

Toutes les direction $\mathbf{d}$ qui vérifient $\mathbf{d} \cdot \nabla f < 0$ sont des directions de descente. Ces directions $\mathbf{d}$ vérifient $\mathbf{d}_1 < 0$. Toutes les autres directions ne sont pas des directions de descente.