INSA-TOULOUSE
Département STPI
2ème année ICBE

Analyse UV 2 - Feuille 2

Exercice 1.

1. Les fonctions suivantes sont-elles continues ?

$$
\begin{aligned}
&\text{a) } \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \qquad \mathbf{x} \mapsto f_1(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}^{p\times n},\\
&\text{b) } \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto f_2(x,y) = \frac{\exp(x)}{x^2+y^2},\\
&\text{c) } \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto f_3(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y},\\
&\text{d) } \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto f_4(x,y) = \Big(\frac{\sin(x+y)}{x+y}, xy\Big),\\
&\text{e) } \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathbf{x} \mapsto f_5(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{x}) \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}^{n\times n}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ déterminer le gradient de

$$\mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto g(x,y) = \frac{\exp(x)}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Correction.

1.a) Faisons tendre $\mathbf{y}$ vers $\mathbf{x}$

$$\|f_1(\mathbf{y}) - f_1(\mathbf{x})\| = \|A\mathbf{y} - A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \, \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| \underset{\mathbf{y}\to\mathbf{x}}{\longrightarrow} 0. \tag{3}$$

1.b) La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de $\mathbf{0}$. En $\mathbf{0}$, elle est discontinue car pour $x_n = 0$ et $y_n = \frac{1}{n}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (0,0) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f_2(x_n,y_n) = +\infty. \tag{4}$$

1.c) La fonction f_3 est continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de la droite $x+y=0$. Pour $x+y=0$, on observe que la fonction $(x,y) \mapsto x+y$ est continue et que la fonction $\frac{sint}{t}$ est continue en 0. Il suit que f_3 est continue en $x+y=0$. La fonction f_3 est continue sur tout $\mathbb{R}^2$.

1.d) La fonction f_4 est continue car ses deux composantes sont continues sur tout $\mathbb{R}^2$.

1.e) On fait tendre $\mathbf{h}$ vers $\mathbf{0}$

$$
\begin{aligned}
f_5(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f_5(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}+\mathbf{h})\cdot(A(\mathbf{x}+\mathbf{h})) - \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{x})\\
&= \mathbf{h}\cdot(A\mathbf{x}) + \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{h}) + \mathbf{h}\cdot(A\mathbf{h})
\end{aligned} \tag{5}
$$

On peut alors majorer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$
\begin{aligned}
\|f_5(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f_5(\mathbf{x})\| &\leq \|\mathbf{h}\|\|A\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\|\|A\mathbf{h}\| + \|\mathbf{h}\|\|A\mathbf{h}\|\\
&\leq \|A\|\big(\|\mathbf{h}\|\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{h}\|^2\big) \underset{\mathbf{h}\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

2. On calcule les dérivées partielles sauf en $(0,0)$ où la fonction n'est pas définie.

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\exp(x)}{x^2+y^2}-\dfrac{2x\exp(x)}{(x^2+y^2)^2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & -\dfrac{2y\exp(x)}{(x^2+y^2)^2}.\end{array}\right. \tag{7}$$

Exercice 2.

1. A l'aide de la formule de Taylor, calculer le gradient et la hessienne de

$$\begin{array}{lll}\text{a) } \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} & \mathbf{x}\mapsto f_1(\mathbf{x})=\mathbf{x}\cdot(A\mathbf{x}) & \text{avec } A\in\mathbb{R}^{n\times n} \text{ et symétrique},\\ \text{b) } \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} & f_2(\mathbf{x})=\mathbf{x}\mapsto \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{x}) & \text{avec } A\in\mathbb{R}^{n\times n} \text{ et non symétrique},\\ \text{c) } \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} & f_3(\mathbf{x})=\mathbf{x}\mapsto \mathbf{b}\cdot\mathbf{x} & \text{avec } \mathbf{b}\in\mathbb{R}^n.\end{array} \tag{8}$$

2. Calculer la jacobienne de

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \mathbf{x}\mapsto g(\mathbf{x})=A\mathbf{x} \quad \text{avec } A\in\mathbb{R}^{p\times n}, \tag{9}$$

Correction.

1. Nous allons caluler les développements de Taylor d'ordre 2 des fonctions f, les mettre sous la forme

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})=f(\mathbf{x})+\mathbf{b}\cdot\mathbf{h}+\mathbf{h}\cdot(A\mathbf{h})+\|\mathbf{h}\|^2\varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) \text{ avec } \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h})\underset{\mathbf{h}\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ et } A \text{ symétrique}. \tag{10}$$

et identifier avec :

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})=f(\mathbf{x})+\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}+\frac{1}{2}\mathbf{h}\cdot(H_f(\mathbf{x})\mathbf{h})+\|\mathbf{h}\|^2\varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) \tag{11}$$

c-à-d

$$\nabla f(\mathbf{x})=\mathbf{b} \text{ et } H_f(\mathbf{x})=2A. \tag{12}$$

1.a)

$$\begin{array}{lcl}f_1(\mathbf{x}+\mathbf{h}) & = & (\mathbf{x}+\mathbf{h})\cdot(A(\mathbf{x}+\mathbf{h}))\\ & = & \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{x})+\mathbf{x}\cdot(A\mathbf{h})+\mathbf{h}\cdot(A\mathbf{x})+\mathbf{h}\cdot(A\mathbf{h}).\end{array} \tag{13}$$

Comme A est symétrique la forme bilinaire $(\mathbf{x},\mathbf{y})\mapsto\mathbf{x}\cdot(A\mathbf{y})$ est symétrique et par conséquent on a

$$f_1(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \quad = \quad f_1(\mathbf{x})+\mathbf{h}\cdot(2A\mathbf{x})+\mathbf{h}\cdot(A\mathbf{h}). \tag{14}$$

d'où $\nabla f_1(\mathbf{x})=2A\mathbf{x}$ et $H_{f_1}(\mathbf{x})=2A$

1.b) Comme

$$\mathbf{x}\cdot(A\mathbf{y})=\mathbf{x}^TA\mathbf{y}=(\mathbf{x}^TA\mathbf{y})^T=\mathbf{y}^TA^T\mathbf{x}=\mathbf{y}\cdot(A^T\mathbf{x}). \tag{15}$$

on a

$$f_2(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \quad = \quad f_2(\mathbf{x})+\mathbf{h}\cdot(A\mathbf{x}+A^T\mathbf{x})+\mathbf{h}\cdot(\tfrac{A+A^T}{2}\mathbf{h}). \tag{16}$$

d'où $\nabla f_2(\mathbf{x})=A\mathbf{x}+A^T\mathbf{x}$ et $H_{f_2}(\mathbf{x})=A+A^T$.

1.c)

$$f_3(\mathbf{x}+\mathbf{h})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{h})=\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{h}=f_3(\mathbf{x})+\mathbf{b}\cdot\mathbf{h} \tag{17}$$

d'où $\nabla f_3(\mathbf{x})=\mathbf{b}$ et $H_{f_3}(\mathbf{x})=0$.

2. On écrit le déveoppement de Taylor d'ordre 1 de g et on identifie avec

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{h})=g(\mathbf{x})+J_g(\mathbf{x})\mathbf{h}+\|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}). \tag{18}$$

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{h})=A(\mathbf{x}+\mathbf{h})=A\mathbf{x}+A\mathbf{h}=g(\mathbf{x})+A\mathbf{h}. \tag{19}$$

On en déduit que $J_g(\mathbf{x})=A$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Déterminer le gradient de

$$g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{x} \longmapsto f(M\mathbf{x}) \tag{20}$$

en fonction de celui de f.
Correction. On applique le développement de Taylor de f.

$$\begin{aligned} f(M(\mathbf{x}+\mathbf{h}) &= f(M\mathbf{x}) + (M\mathbf{h}) \cdot \nabla f(M\mathbf{x}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}) \\ &= f(M\mathbf{x}) + (M\mathbf{h})^T \nabla f(M\mathbf{x}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}) \\ &= f(M\mathbf{x}) + \mathbf{h}^T M^T \nabla f(M\mathbf{x}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}) \\ &= f(M\mathbf{x}) + \mathbf{h} \cdot (M^T \nabla f(M\mathbf{x})) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}). \end{aligned} \tag{21}$$

On obtient $\nabla g(\mathbf{x}) = M^T \nabla f(M\mathbf{x})$.

Exercice 4. (base cylindrique)

On considère le changement de variables

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\sin(\theta), \\ z &= z. \end{aligned} \tag{22}$$

1. Avec $\mathbf{x} = (x, y, z)$, déterminer les vecteurs unitaires

$$\mathsf{e}_r = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\right\|}, \quad \mathsf{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}\right\|}, \quad \mathsf{e}_z = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}\right\|}. \tag{23}$$

2. Montrer que

$$\mathbf{x} = r\mathsf{e}_r + z\mathsf{e}_\mathsf{z} \tag{24}$$

3. Montrer que $(\mathsf{e}_r, \mathsf{e}_\theta, \mathsf{e}_z)$ est une base orthonormale
4. Calculer la jacobienne $J(\mathbf{x})$ de l'application $(r, \theta, z) \mapsto (x, y, z)$
5. En remarquant que

$$J(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\ \Lambda(\mathbf{x}) \tag{25}$$

   avec A une matrice orthogonale et Λ une matrice diagonale, calculer la jacobienne de l'application $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$.
6. Calculer le gradient de f de classe $\mathcal{C}^1$ en coordonnées cartésiennes en fonction de $r, \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}, \mathsf{e}_r, \mathsf{e}_\theta, \mathsf{e}_z$.

Correction.
1. Il nous suffit de dériver

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_r &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathsf{e}_\theta &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathsf{e}_z &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{26}$$

2. Attention il y a une faute dans l'énoncé des étudiants. Il suffit ici de sommer

$$r\mathsf{e}_r + z\mathsf{e}_z = \begin{bmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{27}$$

3. On montre que

$$\mathsf{e}_r \cdot \mathsf{e}_r = 1 \text{ et } \mathsf{e}_\theta \cdot \mathsf{e}_\theta = 1 \text{ et } \mathsf{e}_z \cdot \mathsf{e}_z = 1 \tag{28}$$

et

$$\mathsf{e}_r \cdot \mathsf{e}_\theta = 0 \text{ et } \mathsf{e}_r \cdot \mathsf{e}_z = 0 \text{ et } \mathsf{e}_\theta \cdot \mathsf{e}_z = 0. \tag{29}$$

4 et 5. Le calcul donne

$$J_{(r,\theta,z)\to(x,y,z)}(r,\theta,z) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

d'où

$$\begin{aligned} J_{(x,y,z)\to(r,\theta,z)}(r,\theta,z) &= (J_{(r,\theta,z)\to(x,y,z)}(r,\theta,z))^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\frac{\sin(\theta)}{r} & \frac{\cos(\theta)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{31}$$

6. Le gradient de f est défini par

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \partial_x f \mathsf{e}_x + \partial_y f \mathsf{e}_y + \partial_z f \mathsf{e}_z. \tag{32}$$

D'autre part, on a par composition

$$\begin{bmatrix} \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_r f & \partial_\theta f & \partial_z f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\frac{\sin(\theta)}{r} & \frac{\cos(\theta)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

d'où

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \cos(\theta)\partial_r f - \tfrac{\sin(\theta)}{r}\partial_\theta f, \\ \partial_y f &= \sin(\theta)\partial_r f + \tfrac{\cos(\theta)}{r}\partial_\theta f, \\ \partial_z f &= \partial_z f. \end{aligned} \tag{34}$$

Il suit

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \partial_r f\ \mathsf{e}_r + \frac{\partial_\theta f}{r}\ \mathsf{e}_\theta + \partial_z f\ \mathsf{e}_z. \tag{35}$$