INSA-TOULOUSE
Département STPI
2ème année ICBE

Analyse UV 2 - Feuille 1

Exercice 1.

Déterminer $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2\exp(2x+y) + 3x^2 + 2y \\ \exp(2x+y) + 2x \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0. \tag{1}$$

Correction. On intègre tout d'abord selon x à y fixé l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;=\; 2\exp(2x+y) + 3x^2 + 2y. \tag{2}$$

On obtient (les constantes sont le fonctions de y)

$$f(x,y) = \exp(2x+y) + x^3 + 2xy + g(y). \tag{3}$$

Puis on intègre suivant y à x fixé l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \;=\; \exp(2x+y) + 2x. \tag{4}$$

On obtient (les constantes sont le fonctions de x)

$$f(x,y) = \exp(2x+y) + 2xy + h(x). \tag{5}$$

En comparant (3) et (5), il suit après simplification

$$g(y) = f(x) - x^3. \tag{6}$$

Comme le second membre ne dépend pas de y, il faut nécessairement que g soit constante

$$g(y) = A \text{ avec } A \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

D'après (5), on a

$$f(x,y) = \exp(2x+y) + x^3 + 2xy + A. \tag{8}$$

Il ne nous reste plus qu'à utiliser que $f(0,0) = 0$ pour obtenir

$$f(0,0) = \exp(0+0) + A \quad \Longrightarrow \quad 0 = 1 + A \quad \Longrightarrow \quad A = -1. \tag{9}$$

On peut alors conclure

$$f(x,y) = \exp(2x+y) + x^3 + 2xy - 1. \tag{10}$$

Exercice 2.

Déterminer $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + f(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 3f(x,y) = 0, \\ f(0,0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

Correction. On commence par résoudre la première équation en considérant y comme une constante. Ses solutions sont de la forme

$$f(x,y) = A(y)\exp(\lambda(y)x) \text{ avec } \lambda(y) + 1 = 0 \quad \text{c-à-d} \quad f(x,y) = A(y)\exp(-x). \tag{12}$$

On résout alors la deuxième équation en considérant x comme constant. On a

$$f(x,y) = B(x)\exp(\beta(x)y) \text{ avec } \beta(x) - 3 = 0 \quad \text{c-à-d} \quad f(x,y) = B(x)\exp(3y). \tag{13}$$

On compare alors (12) et (13).

$$f(x,y) = B(y)\exp(3y) = A(y)\exp(-x) \quad \Longrightarrow \quad B(x)\exp(x) = A(y)\exp(-3y). \tag{14}$$

Le premier membre ne dépend pas de x. Par conséquent, il suit

$$A(y) = C\ \exp(3y) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) = C\exp(-x)\exp(3y). \tag{15}$$

Il ne nous reste plus qu'à prendre en compte la condition f(0,0)=1

$$C\exp(0)\exp(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) = \exp(-x)\exp(3y). \tag{16}$$

Exercice 3.

Déterminer $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) -\ yf(x,y) = (1-y)\ \exp(x), \\ f(0,y) = y^3 + cos(y) + 1 - y. \end{cases} \tag{17}$$

Correction. Nous résolvons la première équationà y constant. Il nous faut tout d'abord trouver une solution particulière. Cherchons la sous la forme $f_p(x) = A\exp(x)$. En injectant dans l'équation, nous obtenons

$$\frac{\partial f_p}{\partial x}(x,y) -\ yf_p(x,y) = A\ (1-y)\ \exp(x) = (1-y)\ \exp(x) \quad \Longrightarrow \quad A = 1. \tag{18}$$

Pour obtenir les solutions homogènes $f_h(x,y) = B(y)\exp\lambda x$ on introduit le polynôme caractéristique

$$\lambda - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = y \quad \Longrightarrow \quad f_h(x,y) = B(y)\exp(xy). \tag{19}$$

Nous avons donc obtenu que

$$f(x,y) = f_h(x,y) + f_p(x,y) = \exp(x) + B(y)\exp(xy). \tag{20}$$

Il ne nous reste plus qu'à utiliser la condition aux limites

$$f(0,y) = 1 + B(y) = y^3 + cos(y) + 1 - y \quad \Longrightarrow \quad B(y) = y^3 + cos(y) - y. \tag{21}$$

Nous pouvons alors conclure

$$f(x,y) = 1 + (y^3 + cos(y) - y)\exp(xy). \tag{22}$$

Exercice 4.

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ avec

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)cos(xy) \tag{23}$$

est continue.

Correction. Les fonction $(x,y) \rightarrow x$ et $(x,y) \rightarrow y$ sont continues. Par conséquent, les fonctions $(x,y) \rightarrow xy$ et $(x,y) \rightarrow x^2 + y^2$ sont continues. Comme la fonction $t \longrightarrow \cos t$ est continue, la fonction $(x,y) \rightarrow \cos(xy)$ sont continues. Il ne nous reste plus qu'à multiplier les fonctions $(x,y) \rightarrow x^2 + y^2$ et $(x,y) \rightarrow \cos(xy)$ qui sont continues, pour obtenir que $(x,y) \rightarrow f(x,y)$ est continue.

Exercice 5.

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ avec

$$f(x,y,z) = \frac{xy}{x^2+y^2} + z \quad \text{pour } (x,y,z) \neq (0,0,z) \quad \text{et} \quad f(0,0,z) = z. \tag{24}$$

1. Quel est le domaine de continuité de f ?
2. Déterminer les dérivées partielles de f et leurs domaines de définition
4. Déterminer l'ensemble sur lequel f est de classe C^1.

Correction.

1. La fonctiton est clairement continue sauf peut être en $(0,0,z)$ (division par 0). Etudions la continuité de f $(0,0,z)$. Pour montrer que f n'est pas continue il nous faut trouver une suite $\vec{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$ qui vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \vec{x}_n = (0,0,z) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(\vec{x}_n) \neq z. \tag{25}$$

On définit la suite $\vec{x}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, z)$ qui vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \vec{x}_n = (0,0,z) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(\vec{x}_n) = z + \frac{1}{2} \neq z. \tag{26}$$

2. On peut tout d'abord calculer les dérivées partielles de f pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & = & \dfrac{y}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{(y^2-x^2)y}{(x^2+y^2)^2}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & = & \dfrac{(x^2-y^2)x}{(x^2+y^2)^2}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & = & 1 \end{array}\right. \tag{27}$$

Pour savoir si cette fonction admet des dérivées partielles en $(0,0,z)$ il nous faut former les limites

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0,z) - f(0,0,z)}{h} = \dfrac{z-z}{h} = 0, \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h,z) - f(0,0,z)}{h} = \dfrac{z-z}{h} = 0, \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,0,z+h) - f(0,0,z)}{h} = \dfrac{z+h-z}{h} = 1, \end{array}\right. \tag{28}$$

Les trois dérivées partielles sont définies sur tout $\mathbb{R}^3$.

3. La fonction n'est pas C^1 en $(0,0,z)$ car pour $\vec{x}_n = (\frac{1}{n}, 0, z)$

$$\lim_{n\to+\infty} \vec{x}_n = (0,0,z) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_n) = +\infty \tag{29}$$

La fonction f est donc C^1 sur $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe $(0,0,z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.