INSA-TOULOUSE Année 2008/2009
Département STPI
2ème année ICBE

Analyse UV 2 - CC2

Durée : 1H15 (1H40 pour les $1/3$ temps)
Aucun document n'est autorisé
La clarté des explications et la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Rappel : Transformée de Laplace

$$\widehat{y}(p) = \int_0^{+\infty} y(t)\exp(-pt)dt. \tag{1}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$f(t)$	$\mathsf{D}_{\widehat{f}}$	$\widehat{f}(p)$
$\exp at$	$]a, +\infty[$	$\dfrac{1}{p-a}$
$t^n \ \exp at$	$]a, +\infty[$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$

(2)

Trigonométrie :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b). \tag{3}$$

Exercice 1.

Trouver **à l'aide de la transformée de Laplace** la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ qui vérifie} \\ y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0, \quad \text{pour } t \geq 0, \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Exercice 2.

Intégrer $f : (x, y, z) \longmapsto z$ sur le cylindre $\mathcal{C}$ de rayon $R > 0$ et de hauteur $H > 0$

$$\mathcal{C} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, \quad 0 \leq z \leq H\Big\}. \tag{5}$$

Exercice 3.

Déterminer la surface du triangle T de $\mathbb{R}^3$ reliant les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Exercice 4.

Intégrer $g : (x, y, z) \longmapsto z^2$ sur la sphère S de rayon $R > 0$

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\Big\}. \tag{6}$$

Exercice 5.

Intégrer $h : (x, y, z) \longmapsto x^2$ sur la courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{C} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos(\theta),\ y = \sin(\theta),\ z = 2\theta,\ \theta \in [0, 2\pi]\Big\}. \tag{7}$$

Exercice 6.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on travaille en coordonnées sphériques (r, θ, φ).

Déterminer un champ de vecteurs $\vec{E}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_r(r)\ \vec{e}_r, \qquad \text{et} \quad \text{div}(\vec{E}(r, \theta, \varphi)) = \rho(r, \theta, \varphi) \tag{8}$$

avec

$$\rho(r, \theta, \varphi) = 1 - \frac{r^2}{R^2} \text{ si } r < R \quad \text{et} \quad \rho(r, \theta, \varphi) = 0 \text{ si } r > R. \tag{9}$$