INSA-TOULOUSE Année 2008/2009
Département STPI
2ème année ICBE

Analyse UV 2 - CC1

Durée : 1H15
Aucun document n'est autorisé
La clarté des explications et la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1. (environ sur 3)

Déterminer la limite en $(0,0)$ de

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f(x,y) = \dfrac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 2. (environ sur 3)

1. Calculer le gradient et la hessienne de la fonction suivante

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) \longmapsto \cos(x+2y). \end{cases} \tag{2}$$

2. Calculer la jacobienne de

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \longmapsto (xy, \exp(3y)). \end{cases} \tag{3}$$

Exercice 3. (environ sur 4)

Résoudre le problème suivant

Trouver $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2f(x,y) = \exp(2x), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + f(x,y) = \dfrac{1}{4}\exp(2x), \\ f(0,0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Exercice 4. (environ sur 5)

Donner les domaines de définition des transformées de Laplace et les transformées de Laplace des fonctions suivantes $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t, \\ f_2(t) &= \cosh(t) = \frac{\exp(t)+\exp(-t)}{2}, \\ f_3(t) &= t\, exp(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Rappel : $\widehat{f}(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-pt) f(t) dt$.

Exercice 5. (environ sur 5)

On note $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ le produit scalaire canonique entre les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot (A\mathbf{x}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} \tag{6}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
1. Calculer le gradient de f.
2. Calculer la hessienne de f.
3. Rappeler une condition suffisante (portant sur les dérivées de la fonction) pour être un argument-minimum local d'une fonction de plusieurs variables.
3. Déterminer l'ensemble des $\mathbf{x}$ argument-minima locaux de f.
4. Ces minima sont-ils globaux ?
5. Quel est le minimum de f ?