

UNIVERSITÉ DE PAU

MASTER 1 MMS

# Analyse numérique fondamentale

SÉBASTIEN TORDEUX ET VICTOR PÉRON

2013/2014

# Table des matières

<b>I</b>	<b>La méthode des différences finies</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Discrétisation des équations différentielles ordinaires d'évolution</b>	<b>5</b>
1.1	Position du problème et réduction d'ordre . . . . .	5
1.2	Théorème d'existence et unicité . . . . .	6
1.3	Les schémas à un pas . . . . .	8
1.4	Etude de $a$ -stabilité . . . . .	9
1.5	Stabilité d'un schéma numérique (cas général) . . . . .	11
1.6	Consistance d'un schéma numérique . . . . .	11
1.7	Convergence d'un schéma numérique . . . . .	12
1.8	Exercices du chapitre 1 . . . . .	13
<b>2</b>	<b>La méthode des différences finies pour les problèmes aux limites statiques</b>	<b>18</b>
2.1	Différences finies en dimension 1 . . . . .	18
2.2	Quelques exemples de différences finies . . . . .	19
2.2.1	Différence finie décentrée à droite . . . . .	19
2.2.2	Différences finies décentrées à gauche . . . . .	19
2.2.3	Différence finie centrée . . . . .	20
2.2.4	Le schéma à trois points . . . . .	20
2.3	Discrétisation des problèmes de type elliptique en dimension 1 . . . . .	21
2.3.1	Position du problème . . . . .	21
2.3.2	Discrétisation de l'équation principale . . . . .	22
2.3.3	Discrétisation des conditions aux limites . . . . .	22
2.3.4	Formulation vectorielle . . . . .	23
2.3.5	Méthode du point fantôme ou virtuel . . . . .	25
2.4	Discrétisation des problèmes de type elliptique en dimension 2 . . . . .	26
2.4.1	Définition du problème continu . . . . .	26
2.4.2	Différences finies en dimension 2 . . . . .	28
2.4.3	Approximation de l'équation principale . . . . .	30
2.4.4	Approximation des conditions aux limites . . . . .	31
2.4.5	Formulation vectorielle . . . . .	31
2.4.6	Un exemple de problème à discrétiser, formulation non éliminée . . . . .	33
2.4.7	Technique du point virtuel ou fantôme . . . . .	35
2.4.8	Un exemple de formulation éliminée avec points virtuels . . . . .	37
2.5	Exercices du chapitre 2 . . . . .	41

<b>3</b>	<b>Discrétisation des problèmes aux limites d'évolution</b>	<b>46</b>
3.1	Discrétisation de l'équation de réaction-advection-diffusion en dimension un d'espace . . . . .	46
3.1.1	Semi-discrétisation en espace . . . . .	47
3.1.2	Formulation éliminée . . . . .	49
3.1.3	Discrétisation en temps . . . . .	50
3.2	Discrétisation de l'équation des ondes . . . . .	50
3.2.1	Semi-discrétisation en espace . . . . .	51
3.2.2	Formulation éliminée . . . . .	52
3.2.3	Schéma à un pas . . . . .	52
3.2.4	Schéma à deux pas . . . . .	53
3.3	Analyse de stabilité de Von-Neumann . . . . .	53
3.3.1	La transformation de Fourier . . . . .	53
3.3.2	Principe de l'analyse de Von Neumann . . . . .	54
3.3.3	Discrétisation de l'équation de diffusion par le schéma d'Euler explicite . . . . .	55
3.3.4	Application à l'équation de diffusion discrétisé par le schéma d'Euler implicite . . . . .	55
3.3.5	Application à l'équation des ondes (schéma saute-mouton) . . . . .	56
3.3.6	Application à l'équation des ondes discrétisées par une méthode des trapèzes implicites . . . . .	57

## **Première partie**

### **La méthode des différences finies**

# Chapitre 1

## Discrétisation des équations différentielles ordinaires d'évolution

### 1.1 Position du problème et réduction d'ordre

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation différentielle ayant la forme

$$y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)). \quad (1.1)$$

avec  $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction inconnue et  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que (1.1) est une EDO d'ordre  $p$ . Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus précisément à la discrétisation des problèmes de Cauchy qui sont des problèmes aux données initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^p \text{ tel que} \\ y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)), \quad \forall t \geq 0, \\ y(0) = \alpha_0, \\ y'(0) = \alpha_1, \\ \dots \\ y^{(p-1)}(t) = \alpha_{p-1}. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Ces problèmes de Cauchy d'ordre  $p$  mettant en jeu des fonctions à valeurs scalaires peuvent prendre la forme d'une EDO vectorielle d'ordre 1. En effet, en notant

$$Y(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t))^T \quad (1.3)$$

nous avons

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \dots \\ y^{(p-1)}(t) \\ y^{(p)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \dots \\ y^{(p-1)}(t) \\ f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

En notant  $\alpha = (y(0), y'(0), \dots, y^{(p-1)}(0))^T$  et  $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$  la fonction définie par

$$F(t, \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{p-2} \\ u_{p-1} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{p-1} \\ f(t, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

le problème (1.2) s'écrit

$$\begin{cases} \text{Chercher } Y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ de classe } C^1 \text{ tel que} \\ Y'(t) = F(t, Y(t)), \quad \forall t \geq 0, \\ Y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.6)$$

Nous allons après avoir étudié l'existence et l'unicité des EDO vectorielles d'ordre 1, nous allons présenter les schémas numériques à un pas, puis en effectuer l'analyse.

## 1.2 Théorème d'existence et unicité

**Theoreme 1.1 (Cauchy-Lipschitz-Picard)** Si  $\alpha \in \mathbb{R}^p$ ,  $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$  est continue et vérifie

$$\exists L > 0 \quad \forall t > 0, \quad \forall U, V \in \mathbb{R}^p, \quad \|F(t, U) - F(t, V)\| \leq L\|U - V\| \quad (1.7)$$

alors le problème (1.6) admet une unique solution.

**Preuve.** Soit  $\mathcal{L} : C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}^p) \longrightarrow C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}^p)$  l'application définie par

$$\mathcal{L}V(t) = \alpha + \int_0^t F(s, V(s))ds \quad (1.8)$$

Remarquons que  $Y$  est solution de (1.6) ssi  $Y$  est point fixe de  $\mathcal{L}$ .

(i) Pour démontrer l'**existence** d'une solution de (1.6), nous allons démontrer, pour tout  $T \geq 0$ , l'existence et l'unicité d'un point fixe de  $\mathcal{L}$  dans l'espace de Banach

$$X_k^T = \{V \in C^0([0, T], \mathbb{R}^p) : \|V\|_{X_k^T} < +\infty\} \quad (1.9)$$

avec

$$\|V\|_{X_k^T} = \sup_{t \in [0, T]} \|e^{-kt}V(t)\|. \quad (1.10)$$

Comme  $T$  est borné, l'application  $\mathcal{L}$  est continue sur  $X_k^T$ . Montrons que  $\mathcal{L}$  est contractante sur  $X_k^T$  pour  $k > L$

$$\|e^{-kt}(\mathcal{L}U(t) - \mathcal{L}V(t))\| = \|e^{-kt} \int_0^t F(s, U(s)) - F(s, V(s))ds\| \quad (1.11)$$

D'après (1.7), il suit l'inégalité

$$\begin{aligned}
\|e^{-kt}(\mathcal{L}U(t) - \mathcal{L}V(t))\| &\leq Le^{-kt} \int_0^t e^{ks} e^{-ks} \|U(s) - V(s)\| ds \\
&\leq Le^{-kt} \left( \int_0^t e^{ks} ds \right) \|U - V\|_{X_k^T} \\
&\leq Le^{-kt} \left( \int_{-\infty}^t e^{ks} ds \right) \|U - V\|_{X_k^T} \\
&\leq \frac{L}{k} \|U - V\|_{X_k^T}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

On peut passer au sup sur  $t$ . Il suit

$$\|\mathcal{L}U - \mathcal{L}V\|_{X_k^T} \leq \frac{L}{k} \|U - V\|_{X_k^T}. \tag{1.13}$$

Comme  $k > L$ , l'application  $\mathcal{L}$  est bien contractante sur  $X_k^T$ . On utilise alors le théorème de point fixe de Picard

$$\exists! Y_T \in X_k^T : \quad \mathcal{L}Y_T(t) = Y_T(t) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.14}$$

Remarquons que pour  $T' > T > 0$ ,  $Y_{T'}|_{[0, T]} \in X_k^T$  et  $\mathcal{L}Y_{T'}(t) = Y_{T'}(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Par unicité, on a l'identité suivante

$$\forall T' > T > 0 \quad Y_{T'}(t) = Y_T(t) \quad \forall t \in [0, T] \tag{1.15}$$

Il suit que

$$\forall T \geq t \quad Y_T(t) = Y_t(t). \tag{1.16}$$

Ceci nous permet de définir la fonction  $Y \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}^p)$  définie par

$$Y : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad t \longmapsto Y(t) = Y_t(t). \tag{1.17}$$

qui vérifie (1.8) et donc (1.6).

(ii) Pour montrer l'**unicité**, nous considérons deux solutions  $Y_1$  et  $Y_2$  de (1.6). Comme  $Y_1$  et  $Y_2$  sont des points fixes de  $\mathcal{L}$  on a

$$Y_1(t) - Y_2(t) = \int_0^t F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s)) ds \tag{1.18}$$

Il suit

$$\|Y_1(t) - Y_2(t)\| \leq L \int_0^t \|Y_1(s) - Y_2(s)\| ds \tag{1.19}$$

En notant  $\psi(t) = \exp(-Lt) \int_0^t \|Y_1(s) - Y_2(s)\| ds$ , on a l'équation

$$\psi'(t) \leq 0, \quad \psi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(t) \geq 0 \quad \implies \psi(t) = 0. \tag{1.20}$$

On peut conclure à l'unicité  $Y_1 = Y_2$ .

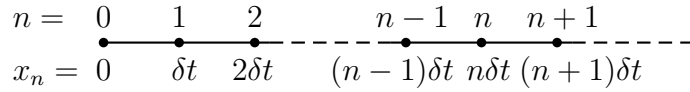


FIGURE 1.1 – Une grille uniforme de pas  $\delta t$

**Remarque 1.1** Dans la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard nous avons introduit la forme intégrale du problème (1.6). L'utilisation de cette formulation est fréquente. On se souviendra que le problème (1.6) est équivalent à sa forme intégrale

$$\begin{cases} \text{Chercher } Y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ de classe } C^0 \text{ qui vérifie} \\ Y(t) - Y(t') = \int_{t'}^t F(s, Y(s)) ds \\ Y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.21)$$

### 1.3 Les schémas à un pas

On introduit une grille uniforme en temps, voir figure 1.1, définie par ses sommets  $t_n = n\delta t$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $Y_n$  l'approximation de  $Y(t_n)$ .

$$Y_n \simeq Y(t_n). \quad (1.22)$$

Un schéma à un pas est une méthode numérique permettant de calculer  $Y_{n+1}$  à partir de  $Y_n$

$$Y_{n+1} = \phi(t_n, \delta t, Y_n) \quad (1.23)$$

avec  $\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ .

La plupart des schémas est basée sur l'approximation de la forme intégrale (1.21) écrite pour  $t = t_{n+1}$  et  $t' = t_n$  et sur une formule d'intégration numérique du second membre

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t) dt \quad \text{avec } g(t) = F(t, Y(t)). \quad (1.24)$$

Le schéma d'Euler explicite. On utilise ici une méthode des rectangles à gauche pour calculer l'aire séparant le graphe de  $g$  pour  $t$  allant de  $t_n$  à  $t_{n+1}$ , voir figure 1.2,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds \simeq \delta t g(t_n) = \delta t F(t_n, Y(t_n)). \quad (1.25)$$

On en déduit le schéma d'Euler explicite

$$Y_{n+1} = Y_n + \delta t F(t_n, Y_n). \quad (1.26)$$

Le schéma d'Euler implicite. On utilise ici une méthode des rectangles à droite

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds \simeq \delta t g(t_{n+1}) = \delta t F(t_{n+1}, Y(t_{n+1})). \quad (1.27)$$



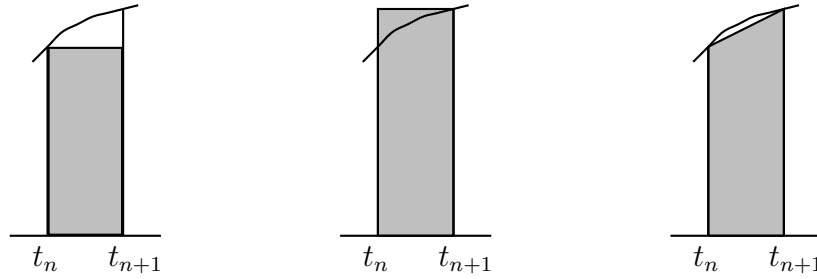


FIGURE 1.2 – Les méthodes d’intégration numérique : rectangle à gauche, rectangle à droite, trapèze

On aboutit au schéma

$$Y_{n+1} = Y_n + \delta t F(t_{n+1}, Y_{n+1}) \iff Y_{n+1} - \delta t F(t_{n+1}, Y_{n+1}) = Y_n. \quad (1.28)$$

Le schéma des trapèzes implicites. La formule d’intégration est celle des trapèzes

$$\begin{cases} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds \simeq \frac{\delta t}{2} g(t_{n+1}) + \frac{\delta t}{2} g(t_n) \\ = \frac{\delta t}{2} F(t_n, Y(t_n)) + \frac{\delta t}{2} F(t_{n+1}, Y(t_{n+1})). \end{cases} \quad (1.29)$$

On aboutit au schéma

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{\delta t}{2} F(t_n, Y_n) + \frac{\delta t}{2} F(t_{n+1}, Y_{n+1}). \quad (1.30)$$

C’est à dire

$$Y_{n+1} - \frac{\delta t}{2} F(t_{n+1}, Y_{n+1}) = Y_n + \frac{\delta t}{2} F(t_n, Y_n). \quad (1.31)$$

Le schéma des trapèzes explicites. Ce schéma consiste à reprendre (1.30) en remplaçant  $Y_{n+1}$  dans le second membre par  $\bar{Y}_{n+1}$  une approximation calculée à l’aide d’une méthode d’Euler explicite

$$\begin{cases} \bar{Y}_{n+1} = Y_n + \delta t F(t_n, Y_n), \\ Y_{n+1} = Y_n + \frac{\delta t}{2} F(t_n, Y_n) + \frac{\delta t}{2} F(t_{n+1}, \bar{Y}_{n+1}). \end{cases} \quad (1.32)$$

**Remarque 1.2** On parle de schéma explicite lorsque le calcul de  $Y_{n+1}$  à partir de  $Y_n$  s’effectue à l’aide d’une formule explicite. A contrario, lorsque le calcul de  $Y_{n+1}$  nécessite la résolution d’un problème on parle de méthode implicite.

Bien entendu pour le même  $\delta t$ , les schémas explicites nécessiteront beaucoup moins de temps de calcul que les schémas implicites.

## 1.4 Etude de $a$ -stabilité

Soit  $a > 0$  un paramètre. L’étude de  $a$ -stabilité consiste à étudier les propriétés d’un schéma numérique

$$y_{n+1} = \phi(t_n, \delta t, y_n) \text{ et } y_0 = \alpha. \quad (1.33)$$

sur le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } y \text{ de classe } C^1 \text{ qui vérifie} \\ y'(t) + ay(t) = 0 \quad t \geq 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.34)$$

dont la solution  $y(t) = \alpha \exp(-at)$  est décroissante en valeur absolue.

On dira qu'un schéma est  $a$ -stable si la suite  $y_n$  est décroissante en valeur absolue et instable sinon. Notons qu'ici  $F(t, y) = F(y) = -ay$ .

a-stabilité du schéma d'Euler explicite. Reprenons le schéma (1.26)

$$y_{n+1} = y_n - a\delta t y_n = (1 - a\delta t)y_n \quad (1.35)$$

Notons que  $a\delta t > 0$ . La suite  $y_n$  est une suite géométrique de raison  $1 - a\delta t$ . Pour que le schéma soit  $a$ -stable il faut que cette raison soit inférieure 1 en valeur absolue. Il suit que le schéma est stable si  $a\delta t < 2$  et instable sinon.

a-stabilité du schéma d'Euler implicite. Reprenons le schéma (1.28)

$$(1 + a\delta t)y_{n+1} = y_n \quad (1.36)$$

La raison de la suite  $y_n$  est  $(1 + a\delta t)^{-1}$ . Cette raison est toujours inférieure à 1 en valeur absolue. Le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable.

a-stabilité du schéma des Trapèzes implicites. Reprenons le schéma (1.30)

$$\left(1 + \frac{a\delta t}{2}\right)y_{n+1} = \left(1 - \frac{a\delta t}{2}\right)y_n \quad (1.37)$$

La raison de la suite  $y_n$  est  $\frac{1-a\delta t/2}{1+a\delta t/2}$ . Cette raison est toujours inférieure à 1 en valeur absolue. Le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable.

a-stabilité du schéma des Trapèzes explicites. Reprenons le schéma (1.32)

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n - a\delta t y_n = (1 - a\delta t)y_n, \\ y_{n+1} = y_n - \frac{a\delta t}{2} y_n - \frac{a\delta t}{2} \bar{y}_{n+1}. \end{cases} \quad (1.38)$$

Après simplification on a

$$y_{n+1} = \left(1 - a\delta t + \frac{(a\delta t)^2}{2}\right)y_n \quad (1.39)$$

La raison de la suite  $y_n$  est  $1 - a\delta t + \frac{(a\delta t)^2}{2}$  qui est inférieure à 1 en valeur absolue si  $a\delta t < 2$ . Comme pour le schéma d'Euler explicite, le schéma est  $a$ -stable si  $a\delta t < 2$  et instable sinon.

**Remarque 1.3** *Les schémas implicites sont en général plus robuste que les schémas explicites du point de vue leur stabilité. Ils auront moins tendance à être sujet à des phénomènes d'explosion numérique.*

## 1.5 Stabilité d'un schéma numérique (cas général)

Nous nous intéressons à la résolution d'une équation donnée de la forme

$$Y'(t) = F(t, Y(t)) \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (1.40)$$

par un schéma à un pas de la forme

$$Y_{n+1} = \phi(t_n, \delta t, Y_n). \quad (1.41)$$

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Nous considérons deux suites  $(Y_n^1)_{n \geq N}$  et  $(Y_n^2)_{n \geq N}$  définies par le même schéma numérique et leurs données initiales  $Y_N^1$  et  $Y_N^2$ .

$$\begin{cases} Y_{n+1}^1 = \phi(t_n, \delta t, Y_n^1) \text{ pour } n \geq N \text{ avec } Y_N^1 \text{ donné,} \\ Y_{n+1}^2 = \phi(t_n, \delta t, Y_n^2) \text{ pour } n \geq N \text{ avec } Y_N^2 \text{ donné.} \end{cases} \quad (1.42)$$

On dit que le schéma est stable pour l'EDO (1.40) si

$$\exists C > 0 : \quad \forall n \geq N \quad \forall \delta t > 0 \quad \forall Y_N^1 \in \mathbb{R}^p \text{ et } Y_N^2 \in \mathbb{R}^p \text{ et}$$

$$Y_n^1, Y_n^2 \text{ définis par (1.42)} \quad \|Y_n^1 - Y_n^2\| \leq C \|Y_N^1 - Y_N^2\| \quad (1.43)$$

Cette propriété traduit le fait qu'à deux conditions initiales proches correspondent deux approximations numériques proches.

**Remarque 1.4** *En fait la a-stabilité n'est rien d'autre que la stabilité d'un schéma numérique pour l'équation  $y'(t) + ay(t) = 0$*

## 1.6 Consistance d'un schéma numérique

L'erreur de consistance estime l'erreur commise par le schéma au temps  $t_n$ . Elle est définie par

$$\delta_n = Y(t_{n+1}) - \phi(t_n, \delta t, Y(t_n)). \quad (1.44)$$

avec  $Y(t)$  la solution du problème

$$Y'(t) = F(t, Y(t)) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{et} \quad Y(0) = \alpha. \quad (1.45)$$

On dit que le schéma est consistant et d'ordre  $m$  si

$$\exists C > 0 : \quad \forall \delta t > 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \|\delta_n\| \leq C (\delta t)^{m+1} \quad (1.46)$$

Passons à un exemple de calcul d'ordre de consistance d'un schéma numérique. Nous considérons le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ tel que} \\ y'(t) = \sin(y(t)) \quad \text{pour } t \geq 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.47)$$

Nous approchons  $y$  à l'aide de la méthode d'Euler explicite

$$y_{n+1} = \phi(t_n, \delta t, y_n) \text{ avec } \phi(t_n, \delta t, y_n) = y_n + \delta t \sin(y_n). \quad (1.48)$$

Remarquons que la solution exacte  $y$  est de classe  $C^\infty$  puis que  $|y'(t)| \leq 1$  et  $|y''(t)| = |y'(t) \cos(u(t))| \leq 1$ . Calculons maintenant l'erreur de consistance

$$\begin{aligned} \delta_n &= y(t_{n+1}) - \phi(t_n, \delta t, y(t_n)) \\ &= y(t_{n+1}) - \left( y(t_n) + \delta t \sin(y(t_n)) \right) \\ &= y(t_{n+1}) - \left( y(t_n) + \delta t y'(t_n) \right). \end{aligned} \quad (1.49)$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégrale

$$\delta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) y''(t) dt \quad (1.50)$$

Nous pouvons alors majorer pour conclure

$$|\delta_n| \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) dt = \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2} = \frac{\delta t^2}{2}. \quad (1.51)$$

Le schéma est donc consistant d'ordre 1.

## 1.7 Convergence d'un schéma numérique

On approche la solution de

$$\begin{cases} \text{Chercher } Y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ de classe } C^1 \text{ tel que} \\ Y'(t) = F(t, Y(t)) \quad \text{pour } t \geq 0, \\ Y(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.52)$$

par un schéma numérique à un pas

$$Y_{n+1} = \phi(t_n, \delta t, Y_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.53)$$

On dit que ce schéma converge à l'ordre  $m$  pour  $t \leq T$  s'il existe  $C : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$  continue tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \delta t > 0 \quad \|Y(t_n) - Y_n\| \leq C(t_n) \delta t^m. \quad (1.54)$$

**Theoreme 1.2 (Principe de Lax)** *Si un schéma est stable et consistant d'ordre  $m$  alors il converge d'ordre  $m$ .*

**Preuve.** Pour tout  $n \geq p$ , nous notons  $(Y_n^p)_{n \geq p}$  la suite définie par

$$Y_n^p = Y(t_p) \text{ et pour } n \geq p \quad Y_{n+1}^p = \phi(t_n, \delta t, Y_n^p) \quad (1.55)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $t_n \leq T$ . Il nous faut estimer  $e_n = Y_n - Y(t_n)$  que nous décomposons sous la forme

$$E_n = Y_n^n - Y_n^0 = Y_n^n - Y_n^{n-1} + Y_n^{n-1} - \dots - Y_n^1 + Y_n^1 - Y_n^0 \quad (1.56)$$

D'après l'inégalité triangulaire on a

$$\|E_n\| \leq \|Y_n^n - Y_n^{n-1}\| + \dots + \|Y_n^k - Y_n^{k-1}\| + \dots + \|Y_n^1 - Y_n^0\|. \quad (1.57)$$

Remarquons que les suites  $(Y_n^k)_{n \geq k}$  et  $(Y_n^{k-1})_{n \geq k}$  vérifient toutes deux

$$Y_{n+1}^k = \phi(t_n, \delta t, Y_n^k) \text{ et } Y_{n+1}^{k-1} = \phi(t_n, \delta t, Y_n^{k-1}) \quad (1.58)$$

et sont initialisées par

$$Y_k^k = Y(t_k) \quad \text{et} \quad Y_k^{k-1} = \phi(t_{k-1}, \delta t, Y(t_{k-1})) \quad (1.59)$$

Comme le schéma est stable, on a

$$\|Y_n^k - Y_n^{k-1}\| \leq C \|Y(t_k) - \phi(t_{k-1}, \delta t, Y(t_{k-1}))\| \quad (1.60)$$

D'autre part, comme le schéma est d'ordre  $m$  on a

$$\|Y_n^k - Y_n^{k-1}\| \leq C (\delta t)^{m+1}. \quad (1.61)$$

On obtient en sommant  $n$  fois cette inégalité comme  $t_n = n\delta t$

$$\|E_n\| \leq C' n (\delta t)^{m+1} \leq C' t_n (\delta t)^m. \quad (1.62)$$

## 1.8 Exercices du chapitre 1

**Exercice 1.1 (Etude de schémas d'Euler)** Soit  $a \in \mathbb{R}^+$ . On considère l'EDO suivante

$$y'(t) = -ay(t), \quad t > 0 \quad (1.63)$$

avec la condition initiale  $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que les schémas d'Euler explicite et d'Euler implicite sont consistants d'ordre 1. On pourra utiliser le fait que la solution  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .
2. Etude de stabilité des schémas d'Euler implicite et explicite : montrer que le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable puis que le schéma explicite est conditionnellement stable. Pour ce dernier, on précisera la condition de stabilité.
3. Démontrer que les deux schémas sont convergents d'ordre au moins 1.
4. Cas vectoriel. Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique positive. On considère à présent l'EDO suivante

$$y'(t) = -Ay(t), \quad t > 0 \quad (1.64)$$

avec la condition initiale  $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Expliciter les schémas d'Euler explicite et implicite associés. Etudier la consistance, stabilité et convergence de ces schémas.

**Exercice 1.2 (Etude de stabilité et schéma du point milieu)** Soit  $a > 0$  et  $h > 0$ . On considère le schéma du point milieu

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, \\ y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}F(t_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + hF(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}), \end{cases} \quad (1.65)$$

où  $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{h}{2}$ , pour discrétiser le problème

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), t > 0 \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Déterminer sous quelle condition ce schéma (1.65) est  $a$ -stable si  $F(t, y) = -ay$ .

**Exercice 1.3** Pour tracer un cercle  $C$  de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $r = 1$ , on peut tracer la courbe paramétrée  $\{(x(t) = \cos t, y(t) = \sin t), t \in [0, 2\pi[ ]\}$  en utilisant un grand nombre de valeurs de  $t$ .

1. Montrer que l'on obtient le cercle  $C$  en considérant le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = x(t), \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (1.66)$$

2. On pose  $h = \frac{2\pi}{n}$ . Montrer que la méthode d'Euler explicite appliquée à (1.66) conduit à calculer les points  $P_k$  de coordonnées  $(x_k, y_k)^T$  tels que  $(x_{k+1}, y_{k+1})^T = A_h(x_k, y_k)^T$  où  $A_h = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Montrer que  $A_h^T A_h = A_h A_h^T = \begin{pmatrix} 1+h^2 & 0 \\ 0 & 1+h^2 \end{pmatrix}$ .

4. Montrer que  $x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = (1+h^2)(x_k^2 + y_k^2)$ . En déduire que les coordonnées de  $P_k$  vérifient  $x_k^2 + y_k^2 = (1+h^2)^k$ . Les points  $P_k$  sont-ils sur le cercle  $C$  ?

5. Montrer que la méthode d'Euler implicite conduit à calculer les points  $Q_k$  dont les coordonnées vérifient dans ce cas  $x_k^2 + y_k^2 = \frac{1}{(1+h^2)^k}$ .

6. On peut résoudre le problème

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

avec la méthode implicite du trapèze en posant, pour  $k \geq 0$  :

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2} (f(t_k, u_k) + f(t_{k+1}, u_{k+1})) .$$

Montrer qu'en l'utilisant pour le problème (1.66), les points  $M_k$  que l'on calcule ont des coordonnées qui vérifient pour tout  $k$ ,  $x_k^2 + y_k^2 = 1$ .

**Exercice 1.4 (Etude de stabilité et schéma d'Euler)** On considère le système différentiel suivant

$$\begin{cases} u'(t) = -7u(t) + 3v(t), & t > 0 \\ v'(t) = 6u(t) - 4v(t), & t > 0 \\ u(0) = \alpha, \\ v(0) = \beta. \end{cases}$$

1. Ecrire ce système sous la forme  $Y'(t) = AY(t)$  où  $Y(t) = (u(t), v(t))^T$ .
2. Calculer la solution exacte de ce système, après avoir diagonalisé la matrice  $A$ .
3. Donnez la condition de stabilité pour la méthode d'Euler explicite appliquée à ce problème.

**Exercice 1.5 (Méthode de Runge-Kutta)** Les méthodes de Runge-Kutta s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} k_i & = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^q a_{i,j} k_j), & 1 \leq i \leq q, \\ \Phi(t_n, y_n, h) & = \sum_{j=1}^q b_j k_j, \\ y_{n+1} & = y_n + h \Phi(t_n, y_n, h), \end{cases} \quad (1.67)$$

où  $h > 0$  et  $A = (a_{i,j})$  est triangulaire inférieure stricte.

1. Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq q$ , on pose  $y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^q a_{i,j} k_j$ . Montrer que la méthode (1.67) peut s'écrire

$$\begin{cases} y_{n,i} & = y_n + h \sum_{j=1}^q a_{i,j} f(t_n + c_j h, y_{n,j}), & 1 \leq i \leq q, \\ \Phi(t_n, y_n, h) & = \sum_{j=1}^q b_j f(t_n + c_j h, y_{n,j}), \\ y_{n+1} & = y_n + h \Phi(t_n, y_n, h). \end{cases} \quad (1.68)$$

2. Soit  $\lambda > 0$  un paramètre réel. On applique cette méthode sous la forme (1.68) pour discrétiser le problème

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.69)$$

On pose  $Y_n = [y_{n,1}, \dots, y_{n,q}]^T$ , et  $e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^q$ . Montrer que le vecteur  $Y_n$  vérifie le système de  $q$  équations

$$(I + h\lambda A)Y_n = ey_n.$$

3. Montrer que la valeur approchée  $y_{n+1}$  de  $y(t_{n+1})$  vérifie

$$y_{n+1} = R(h\lambda)y_n,$$

où  $R(h\lambda) = (1 - h\lambda b^T(I + h\lambda A)^{-1}e)$ .

4. On suppose que la méthode est d'ordre  $p$ . Montrer que la fonction de stabilité  $R(x)$  doit vérifier

$$R(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^p}{p!} + \mathcal{O}(x^{p+1}).$$

5. Montrer en utilisant (1.70) que pour  $x$  assez petit, la fonction  $R$  vérifie

$$R(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^k b^T A^{k-1} e.$$

En déduire que les conditions suivantes sont nécessaires pour que la méthode soit d'ordre  $p$  :

$$b^T A^{k-1} e = \frac{1}{k!}, \quad 1 \leq k \leq p.$$

6. On suppose que la méthode est explicite. Montrer en utilisant (1.71) que la fonction  $R$  vérifie

$$R(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^p}{p!} + \sum_{k=p+1}^q (-x)^k b^T A^{k-1} e.$$

**Remarque 1.5** Si pour une norme matricielle donnée,  $\|B\| < 1$ , alors la matrice  $I - B$  est inversible, et son inverse est donnée par la série géométrique

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \quad (1.70)$$

Si la matrice  $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  est strictement triangulaire inférieure, alors dès que  $j \geq q$ , on aura

$$A^j = 0. \quad (1.71)$$

**Exercice 1.6 (Une méthode multipas)** Nous avons étudié en cours uniquement des méthodes à un pas. Dans ce cas, le calcul de  $y_{n+1}$  ne fait intervenir que les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Il existe aussi des méthodes qui font intervenir des instants antérieurs. Il s'agit des **méthodes multipas**.

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.72)$$

On choisit un pas  $h > 0$ , on définit les instants  $t_n$  ( $t_{n+1} = t_n + h$ ),  $n \geq 0$ , et on note  $f_n = f(t_n, y_n)$ . Les méthodes multipas (à  $k+1$  pas) linéaires associées au problème (1.72) s'écrivent sous la forme suivante

$$y_{n+1} + \alpha_0 y_n + \cdots + \alpha_k y_{n-k} = h(\beta_{-1} f_{n+1} + \beta_0 f_n + \cdots + \beta_k f_{n-k}). \quad (1.73)$$

Ces méthodes sont dites linéaires car la formule (1.73) est linéaire par rapport à  $f$ .

Dans cet exercice, on s'intéresse à un schéma à 2 pas défini par

$$y_{n+1} + \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} = h\beta f_{n+1}. \quad (1.74)$$



1. Le schéma (1.74) est-il implicite ou explicite ?

La formule (1.74) peut être utilisée pour  $n \geq 1$ , le calcul de  $y_1$  se faisant par exemple en utilisant la méthode d'Euler implicite. Pour cette méthode, l'erreur locale de consistance est donnée par

$$\tau_n = y(t_{n+1}) - \alpha_0 y(t_n) - \alpha_1 y(t_{n-1}) - h\beta f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) .$$

Par définition, la méthode est d'ordre  $p$  si  $\tau_n = \mathcal{O}(h^{p+1})$ .

2. On suppose que la solution  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  et :  $y(t_n) \neq 0$ ,  $y'(t_n) \neq 0$  et  $y''(t_n) \neq 0$ . Déterminer les coefficients  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  et  $\beta$  de sorte que la méthode (1.74) soit d'ordre 2.

3. En déduire que la méthode s'écrira

$$y_{n+1} + \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} = \frac{2h}{3}f_{n+1} .$$

4. On étudie par la suite la stabilité de cette méthode en l'appliquant au problème

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.75)$$

où  $\lambda > 0$  est un paramètre réel. Vérifier que les  $y_n$  satisfont la relation

$$y_{n+1}\left(1 + \frac{2\lambda h}{3}\right) + \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} = 0 .$$

5. Montrer qu'il existe  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  tels que les  $y_n$  satisfont  $y_n = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n$ .

6. Conclure quant à la convergence de la méthode (1.74) d'ordre 2 appliquée au problème (1.75).

# Chapitre 2

## La méthode des différences finies pour les problèmes aux limites statiques

### 2.1 Différences finies en dimension 1

La plupart des fonctions ne peuvent pas être représentées par des formules analytiques. Il est donc impossible de calculer leurs dérivées, même avec un code de calcul formel. La méthode des différences finies propose un moyen de calculer une approximation numérique des valeurs des dérivées d'une fonction.

On se place sur le segment  $[0, L]$  que l'on discrétise à l'aide de la grille définie par ses sommets

$$x_n = nh \quad \text{avec } n \in \llbracket 0, N \rrbracket \text{ et } Nh = L. \quad (2.1)$$

On dit que  $h$  est le pas de la grille. L'écart  $h$  entre  $x_n$  et  $x_{n+1}$  étant constant, on parle de grille uniforme. On considère une fonction régulière  $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  et on note  $u_n$  la valeur de  $u$  en  $x_n$

$$u_n = u(x_n). \quad (2.2)$$

Une différence finie à  $p$  points est une combinaison linéaire de  $p$   $u_n$ . Elles ont pour vocation d'approcher les dérivées de  $u$  au point  $x_n$ .

Soit  $Du$  une différence finie. On dit que  $Du$  approche  $u^{(l)}(x_n)$  à l'ordre  $q$  si il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$

$$\forall h \in [0, h_0] \quad \|Du - u^{(l)}(x_n)\| \leq Ch^q. \quad (2.3)$$

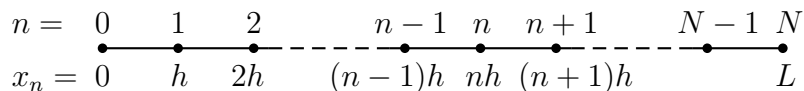


FIGURE 2.1 – Une grille uniforme de pas  $h$

## 2.2 Quelques exemples de différences finies

### 2.2.1 Différence finie décentrée à droite

A partir de la définition de la dérivée

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad (2.4)$$

on introduit pour approcher  $u'(x_n)$  la différence finie décentrée à droite

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h}. \quad (2.5)$$

**Calculons l'ordre en  $h$  de cette approximation** Comme  $[0, L]$  est compact, notons que la fonction  $u \in C^\infty([0, L])$  ainsi que ses dérivées sont bornées en valeur absolue. On note  $\|v\|_\infty$  le maximum de  $|v(x)|$ . Pour tout  $x \in [0, L]$  on a

$$|u(x)| \leq \|u\|_\infty, \quad |u'(x)| \leq \|u'\|_\infty, \quad |u''(x)| \leq \|u''\|_\infty. \quad (2.6)$$

Nous allons utiliser le développement de Taylor pour déterminer l'ordre de la différence finie. Comme  $u_{n+1} = u(x_{n+1}) = u(x_n + h)$  on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{6}r(h), \\ u_n &= u(x_n). \end{aligned} \quad (2.7)$$

avec  $|r(h)| \leq \|u^{(3)}\|_\infty$ . En soustrayant il suit

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = u'(x_n) + \frac{h}{2}u''(x_n) + \frac{h^2}{6}r(h). \quad (2.8)$$

On conclut donc que dès que  $u''(x_n) \neq 0$ , la différence finie décentrée à droite  $\frac{u_{n+1} - u_n}{h}$  est une approximation d'ordre 1 de  $u'(x_n)$ . Cette approximation est au moins d'ordre 2 si  $u''(x_n) = 0$ ;

### 2.2.2 Différences finies décentrées à gauche

L'idée est très similaire. On approche  $u'(x_n)$  par

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h}. \quad (2.9)$$

**Calcul de l'ordre.** Comme  $u_{n-1} = u(x_{n-1}) = u(x_n - h)$ , un développement de Taylor nous fournit

$$\begin{aligned} u_n &= u(x_n), \\ u_{n-1} &= u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{6}r(h), \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec  $|r(h)| \leq \|u^{(3)}\|_\infty$ . En formant la différence finie nous montrons que  $\frac{u_n - u_{n-1}}{h}$  est une approximation d'ordre 1 de  $u'(x_n)$  si  $u''(x_n) \neq 0$ .

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = u'(x_n) - \frac{h}{2}u''(x_n) + \frac{h^2}{6}r(h). \quad (2.11)$$

### 2.2.3 Différence finie centrée

Afin d'améliorer l'approximation de  $u'(x_n)$ , nous définissons une différence finie bénéficiant de plus de symétrie que les deux précédentes

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}. \quad (2.12)$$

**Calcul de l'ordre** On écrit le développement de Taylor à un ordre suffisant afin de faire apparaître l'ordre optimal de la différence finie

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}r(h), \\ u_{n-1} &= u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}r(h), \end{aligned}$$

avec la fonction générique  $r$  vérifiant  $|r(h)| \leq \|u^{(5)}\|_\infty$ . En formant la différence finie puis en simplifiant on a

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = u'(x_n) + \frac{h^2}{3!}u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{5!}r(h). \quad (2.13)$$

On a obtenu que la différence finie est d'ordre 2 si  $u^{(3)}(x_n) \neq 0$  et d'ordre au moins 4 sinon.

### 2.2.4 Le schéma à trois points

On approche ici  $u''(x_n)$  par la différence finie

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \quad (2.14)$$

Cette différence finie s'obtient à l'aide d'un raisonnement formel qui consiste à emboîter deux différences finies

$$\begin{aligned} u''(x_n) &\simeq \frac{1}{h} \left( u'(x_n + h/2) - u'(x_n - h/2) \right) \\ &\simeq \frac{1}{h} \left( \frac{u(x_n + h) - u(x_n)}{h} - \frac{u(x_n) - u(x_n - h)}{h} \right) \\ &\simeq \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Calcul de l'ordre de cette différence finie** On utilise encore une fois le développement de Taylor de la fonction  $u$  autour du point  $x_n$

$$u_{n+1} = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}u^{(5)}(x_n) + \frac{h^6}{6!}r(h),$$

$$u_n = u(x_n),$$

$$u_{n-1} = u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_n) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x_n) - \frac{h^5}{5!}u^{(5)}(x_n) + \frac{h^6}{6!}r(h),$$

avec la fonction générique  $r$  vérifiant  $|r(h)| \leq \|u^{(6)}\|_\infty$ .

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = u''(x_n) + \frac{2h^2}{4!}u^{(4)}(x_n) + 2\frac{h^4}{6!}r(h) \quad (2.16)$$

La différence finie à trois points est une approximation d'ordre 2 de  $u''(x_n)$  si  $u^{(4)}(x_n) \neq 0$ . Elle est au moins d'ordre 4 si  $u^{(4)}(x_n) = 0$ .

## 2.3 Discrétisation des problèmes de type elliptique en dimension 1

### 2.3.1 Position du problème

Soit  $L > 0$ . Nous notons par  $x \mapsto a(x)$ ,  $x \mapsto b(x)$ ,  $x \mapsto c(x)$  et  $x \mapsto f(x)$  des fonctions de la droite réelle de classe  $C^\infty$  avec  $a(x) > a_0 > 0$ . Soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  des réels.

On considère le problème de chercher  $u \in C^\infty([0, L])$  vérifiant

$$Pu(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, L] \quad L_G u = \alpha \text{ et } L_D u = \beta \quad (2.17)$$

avec  $P$ ,  $L_G$  et  $L_D$  des opérateurs différentiels définis par

$$\left\{ \begin{array}{ll} Pu(x) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x), & \\ L_G u = u(0), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } u'(0), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } u'(0) + \gamma u(0) \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R}, & \text{(condition de Fourier)} \\ L_D u = u(L), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } u'(L), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } u'(L) + \delta u(L) \text{ avec } \delta \in \mathbb{R}. & \text{(condition de Fourier)} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

On parle d'équation principale pour l'équation  $Pu = f$  et de conditions à la limite pour  $L_G u = \alpha$  et  $L_D u = \beta$ .

**Définition 2.1** On dit que  $u \mapsto a(x)u''$  est la partie principale de l'opérateur  $P$ . D'autre part, on parle d'opérateur elliptique si  $a(x) > a_0 > 0$ .

Nous allons dans ce chapitre proposer des méthodes d'approximation de la solution du problème (2.17).

**Theoreme 2.1** Rappelons que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $f$  sont des fonctions  $C^\infty$ . Dans le cas où  $a(x) > a_0 > 0$ , le problème (2.17) admet une unique solution (on dit aussi "est bien posé") ssi on a

$$\left( Pv(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad L_G v = 0 \quad \text{et} \quad L_D v = 0 \right) \implies v = 0. \quad (2.19)$$

Nous allons dans la suite calculer une approximation de la fonction  $u$  à l'aide de la méthode des différences finies. Nous ne pouvons pas calculer (à l'aide d'un ordinateur) toutes les valeurs de la fonction  $u$  (les ordinateurs ne peuvent traiter qu'un nombre fini d'opérations). Nous introduisons donc la grille définie par ses sommets  $x_n$

$$x_n = nh \text{ avec } n \in [0, N] \text{ et } Nh = L. \quad (2.20)$$

On approche ensuite la valeur de la fonction  $u$  en  $x_n$  par  $u_n$

$$u_n \simeq u(x_n) \quad (2.21)$$

Nous avons donc à déterminer  $N + 1$  inconnues  $u_n$ . Afin d'avoir un système d'équations bien posé nous avons besoin de  $N + 1$  équations. Enfin, on note

$$f_n = f(x_n), \quad a_n = a(x_n), \quad b_n = b(x_n), \quad c_n = c(x_n). \quad (2.22)$$

### 2.3.2 Discrétisation de l'équation principale

Plaçons nous en  $0 < x_n < L$ , ie.  $1 < n < N - 1$ . Nous allons approcher l'équation

$$Pu(x_n) = f(x_n) \quad (2.23)$$

C'est à dire

$$a(x_n)u''(x_n) + b(x_n)u'(x_n) + c(x_n)u(x_n) = f(x_n). \quad (2.24)$$

On approche les dérivées  $u'$  et  $u''$  de  $u$  par des différences finies. Nous utilisons des différences finies centrées pour  $u'$  et  $u''$  (différence finie à trois points)

$$a_n \left( \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \right) + b_n \left( \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} \right) + c_n u_n = f_n. \quad (2.25)$$

On obtient après avoir rangé les inconnues par indice croissant

$$\left( \frac{a_n}{h^2} - \frac{b_n}{2h} \right) u_{n-1} + \left( -\frac{2a_n}{h^2} + c_n \right) u_n + \left( \frac{a_n}{h^2} + \frac{b_n}{2h} \right) u_{n+1} = f_n. \quad (2.26)$$

### 2.3.3 Discrétisation des condition aux limites

**On se place ici en  $n = 0$  c'est à dire  $x_n = 0$ .** Remarquons que la grille ne contient pas de points à gauche de  $x_n$ . Il n'est donc pas possible de considérer une différence finie centrée pour approcher  $u'(0)$ . Nous devons donc utiliser une différence finie décentrée à droite

$$u'(0) \simeq \frac{u_1 - u_0}{h} \quad (2.27)$$

Nous avons trois types possibles de conditions à la limite.

- **Condition de Dirichlet :**  $u(0) = \alpha$ . C'est la plus facile à discrétiser. Elle s'écrit tous simplement

$$u_0 = \alpha. \quad (2.28)$$

- **Condition de Neumann :**  $u'(0) = \alpha$ .

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha \text{ c'est à dire } -\frac{1}{h}u_0 + \frac{1}{h}u_1 = \alpha. \quad (2.29)$$

- **Condition de Fourier :**  $u'(0) + \gamma u(0) = \alpha$ .

$$\frac{u_1 - u_0}{h} + \gamma u_0 = \alpha \text{ c'est à dire } \left( \gamma - \frac{1}{h} \right) u_0 + \frac{1}{h} u_1 = \alpha \quad (2.30)$$

**On se place en  $n = N$  c'est à dire  $x_n = L$ .** Nous ne disposons pas cette fois de points de grille à droite de  $x_n$ . Il nous faut pour approcher  $u'(L)$  une différence finie décentrée à gauche

$$u'(L) \simeq \frac{u_N - u_{N-1}}{h}. \quad (2.31)$$

Il nous faut encore pouvoir discrétiser les trois types de condition à la limite

- **Condition de Dirichlet :**  $u(L) = \beta$ .

$$u_N = \beta. \quad (2.32)$$

– **Condition de Neumann** :  $u'(L) = \beta$ .

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \alpha \text{ c'est à dire } -\frac{1}{h}u_{N-1} + \frac{1}{h}u_N = \beta. \quad (2.33)$$

– **Condition de Fourier** :  $u'(L) + \delta u(L) = \beta$ .

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} + \delta u_N = \alpha \text{ c'est à dire } -\frac{1}{h}u_{N-1} + \left(\delta + \frac{1}{h}\right)u_N = \beta. \quad (2.34)$$

### 2.3.4 Formulation vectorielle

**Forme non éliminée** Les  $N + 1$  valeurs  $u(x_n)$  de la solution de (2.17) ont été approchées par les  $u_n$ . Nous avons discrétisé l'équation principale et les conditions aux limites et obtenu un système de  $N + 1$  équations affines reliant ces  $u_n$ . Nous mettons maintenant ces équations sous la forme

$$AU = \ell \quad (2.35)$$

avec  $A \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{N+1}$  et  $\ell \in \mathbb{R}^{N+1}$ .

- La première ligne ( $n=0$ ) de (2.35) contient, suivant la condition à la limite en  $x = 0$ , soit (2.28), soit (2.29), soit (2.30).
- les lignes centrales ( $n = 1$  à  $N - 1$ ) contiennent (2.26).
- La dernière ligne ( $n = N$ ) de (2.35) contient suivant la condition à la limite soit soit (2.32), soit (2.33), soit (2.34).

**Exemple.** Nous allons exhiber la matrice  $A$  et le terme source  $\ell$  du problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = 1, & x \in [0, L], \\ u(0) = 2, \\ u'(L) = 3. \end{cases} \quad (2.36)$$

La discrétisation sur une grille uniforme prend la forme suivante

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ -\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + u_n = 1, & \text{pour } n = 1 \text{ à } N - 1, \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h} = 3, \end{cases} \quad (2.37)$$

ou sous forme ordonnée

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ -\frac{1}{h^2}u_{n-1} + \left(\frac{2}{h^2} + 1\right)u_n - \frac{1}{h^2}u_{n+1} = 1, & \text{pour } n = 1 \text{ à } N - 1, \\ -\frac{1}{h}u_{N-1} + \frac{1}{h}u_N = 3. \end{cases} \quad (2.38)$$

Nous identifions maintenant avec (2.35) qui s'écrit sous sa forme développée

$$\sum_{i=0}^N A_{n,i} u_i = \ell_n, \quad \text{pour } n = 0 \text{ à } N. \quad (2.39)$$

On obtient donc

$$U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \ell = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Il ne nous reste plus qu'à inverser la matrice  $A$  pour déterminer l'approximation numérique de  $u$ .

**Forme éliminée** Remarquons que la première ligne et la dernière ligne de  $A$  n'ont pas du tout la même structure que les lignes centrales de cette matrice. Afin de corriger cette propriété, qui peut être gênante lors de l'inversion numérique nous éliminons les inconnues  $u_0$  et  $u_N$  par de simple opérations algébriques. Reprenons les deux premières lignes de (2.38)

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ -\frac{1}{h^2}u_0 + (\frac{2}{h^2} + 1)u_1 - \frac{1}{h^2}u_2 = 1. \end{cases} \quad (2.42)$$

En éliminant  $u_0$ , on a

$$(\frac{2}{h^2} + 1)u_1 - \frac{1}{h^2}u_2 = 1 + \frac{2}{h^2}. \quad (2.43)$$

De même à partir des deux dernières lignes de (2.38)

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}u_{N-2} + (\frac{2}{h^2} + 1)u_{N-1} - \frac{1}{h^2}u_N = 1, \\ -\frac{1}{h}u_{N-1} + \frac{1}{h}u_N = 3, \end{cases} \quad (2.44)$$

on élimine  $u_N$

$$-\frac{1}{h^2}u_{N-2} + (\frac{1}{h^2} + 1)u_{N-1} = 1 + \frac{3}{h}. \quad (2.45)$$

On obtient donc la formulation éliminée  $A'U' = \ell'$

$$U' = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \ell' = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{h^2} \\ \vdots \\ 1 + \frac{3}{h} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} + 1 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Remarquons qu'après élimination la matrice  $A$  est symétrique.



### 2.3.5 Méthode du point fantôme ou virtuel

Les différences finies, utilisées lors de la dernière section, ont approché à l'ordre 2 l'équation principale et seulement à l'ordre 1 la condition à la limite. La méthode du point fantôme ou virtuel consiste à prolonger à tout  $\mathbb{R}$  la solution du problème (2.17)

$$Pu(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad L_G u = \alpha \text{ et } L_D u = \beta \quad (2.48)$$

puis de la discrétiser en utilisant une différence finie centrée lorsque la condition à la limite contient une dérivée. On devra dans ce cas ajouter un point de grille. Pour être plus concret, reprenons notre exemple.

A gauche, nous devons approcher une condition de Dirichlet. La discrétisation de  $u(0) = 2$  s'écrit

$$u_0 = 2. \quad (2.49)$$

Cette discrétisation est exacte. Nous n'avons pas besoin de rajouter un point de grille. A droite afin de pouvoir discrétiser la condition à la limite  $u'(L) = 3$  à l'aide d'une différence finie centrée autour de 0 nous introduisons le point de grille

$$x_{N+1} = L + h. \quad (2.50)$$

Nous approchons  $u(x_{N+1})$  par  $u_{N+1}$ . La condition  $u'(L) = 3$  s'écrit

$$\frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = 3. \quad (2.51)$$

Afin de fermer le système nous devons discrétiser l'équation principale en  $x_n$  pour  $n = 1$  à  $N$ .

$$-\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + u_n = 1 \quad \text{pour } n = 1 \text{ à } N. \quad (2.52)$$

Dans le cas d'une **formulation non éliminée avec point virtuel** on a

$$U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix}, \quad \ell = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Pour une **formulation éliminée avec point virtuel**, il nous faut éliminer  $u_0$  et  $u_{N+1}$ . Pour  $u_0$ , le calcul a déjà été effectué auparavant. Pour  $u_{N+1}$ , on a

$$\begin{cases} -\frac{u_{N-1} - 2u_N + u_{N+1}}{h^2} + u_N = 1, \\ \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = 3. \end{cases} \quad (2.55)$$

Il suit après élimination

$$-\frac{1}{h^2}u_{N-1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)u_N = \frac{1}{2} + \frac{3}{h}. \quad (2.56)$$

On peut alors identifier les matrices et les vecteurs

$$U' = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \ell = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{h^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{h} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

## 2.4 Discrétisation des problèmes de type elliptique en dimension 2

### 2.4.1 Définition du problème continu

On se place sur le rectangle  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ , voir figure 2.2. Ce rectangle a 4 côtés

$$\begin{cases} \Gamma_g = \{0\} \times [0, L_y], & (\text{g comme gauche}) \\ \Gamma_d = \{L_x\} \times [0, L_y], & (\text{d comme droit}) \\ \Gamma_b = [0, L_x] \times \{0\}, & (\text{b comme bas}) \\ \Gamma_h = [0, L_x] \times \{L_y\}, & (\text{h comme haut}) \end{cases} \quad (2.59)$$

Dans ce cours nous considérons la résolution numérique de problèmes scalaires aux dérivées partielles ayant la forme suivante

$$\begin{cases} Pu(x) = f(x) \text{ pour } x \in \Omega, \\ L_g u(x) = f_g(x) \text{ pour } x \in \Gamma_g, \\ L_d u(x) = f_d(x) \text{ pour } x \in \Gamma_d, \\ L_b u(x) = f_b(x) \text{ pour } x \in \Gamma_b, \\ L_h u(x) = f_h(x) \text{ pour } x \in \Gamma_h, \end{cases} \quad (2.60)$$

avec

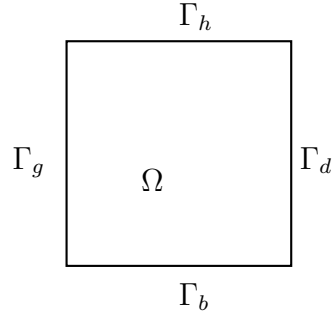


FIGURE 2.2 – Le domaine de calcul 2D

- $P$  un opérateur différentiel en espace ayant la forme

$$Pu(x) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{i,j} \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^2 \beta_i \partial_i u(x) + \gamma u(x). \quad (2.61)$$

où  $\alpha_{i,j}$ ,  $\beta_i$  et  $\gamma$  sont des réels tels que  $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$ . On dit que  $A$  est un opérateur elliptique si

$$\exists C > 0 : \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{i,j} \xi_i \xi_j \geq C \sum_{i=1}^2 \xi_i^2. \quad (2.62)$$

L'opérateur  $P$  peut se mettre sous la forme plus compacte

$$Pu(x) = -\text{div} \left( \alpha \text{grad } u \right) (x) + \beta \cdot \text{grad } u(x) + \gamma u(x) \quad (2.63)$$

avec

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

- $L_g, L_d, L_b, L_h$  un opérateur différentiel défini sur les traces d'une fonction  $u$  sur  $\partial\Omega$ . Ces opérateurs peuvent être soit de Dirichlet, soit de Neumann, soit de Fourier

**Condition de Dirichlet**

$$\begin{aligned} L_g u(x) &= u(x), \\ L_d u(x) &= u(x), \\ L_b u(x) &= u(x), \\ L_h u(x) &= u(x). \end{aligned} \quad (2.65)$$

### Condition de Neumann

$$\begin{aligned}
 L_g u(x) &= - \sum_{j=1}^2 \alpha_{1,j} \partial_j u(x), \\
 L_d u(x) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{1,j} \partial_j u(x), \\
 L_b u(x) &= - \sum_{j=1}^2 \alpha_{2,j} \partial_j u(x) \\
 L_h u(x) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{2,j} \partial_j u(x).
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Cette condition s'écrit aussi plus succinctement

$$L_a u(x) = n_a \cdot (\alpha \operatorname{grad} u(x)), \quad \text{avec } a = g, d, b \text{ ou } h. \tag{2.67}$$

avec  $n$  la normale sortante au domaine

$$\begin{cases} n_g = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_g, & n_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_d, \\ n_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_b, & n_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_d. \end{cases} \tag{2.68}$$

### Condition de Fourier

$$\begin{aligned}
 L_g u(x) &= - \sum_{j=1}^2 \alpha_{1,j} \partial_j u(x) + \delta_g u(x), & \text{avec } \delta_g \in \mathbb{R}, \\
 L_d u(x) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{1,j} \partial_j u(x) + \delta_d u(x), & \text{avec } \delta_d \in \mathbb{R}, \\
 L_b u(x) &= - \sum_{j=1}^2 \alpha_{2,j} \partial_j u(x) + \delta_b u(x) & \text{avec } \delta_b \in \mathbb{R}, \\
 L_h u(x) &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{2,j} \partial_j u(x) + \delta_h u(x), & \text{avec } \delta_h \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

ou encore

$$L_a u(x) = n_a \cdot (\alpha \operatorname{grad} u(x)) + \delta_a u(x), \quad \text{avec } a = g, d, b \text{ ou } h. \tag{2.70}$$

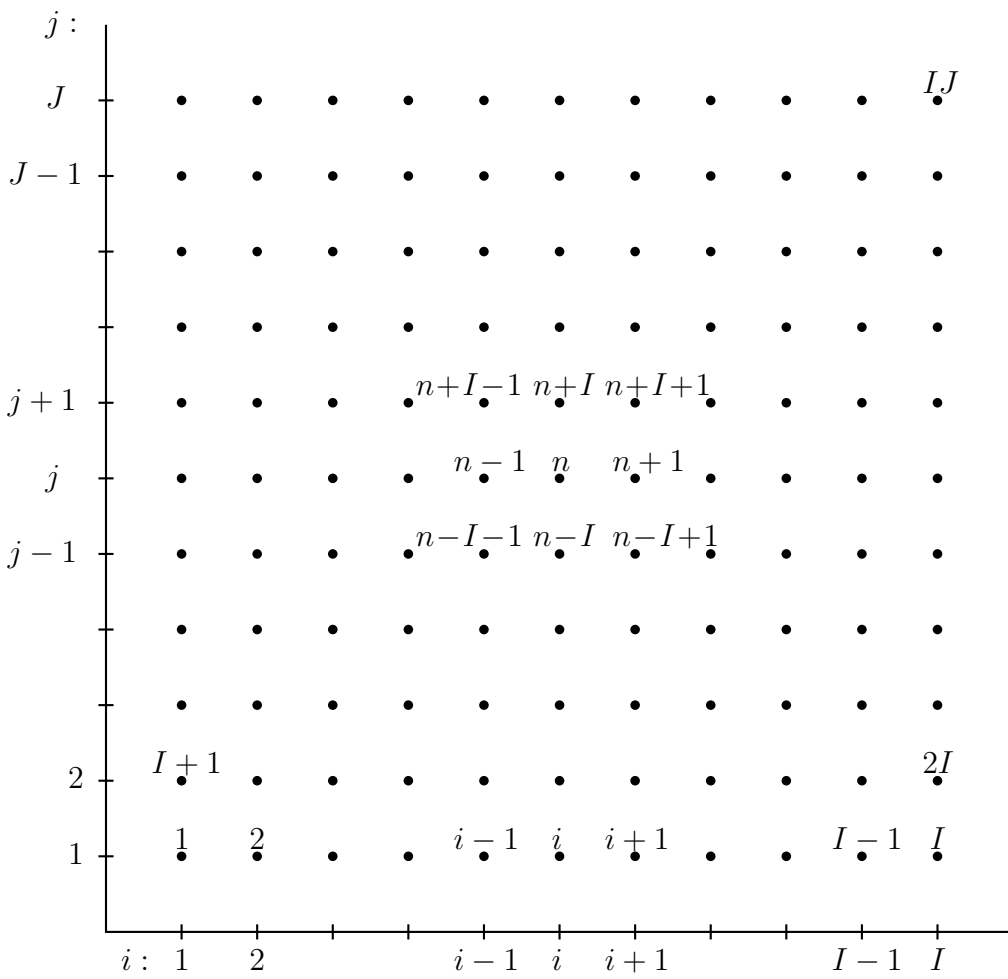
–  $f, f_g, f_d, f_b, f_h$  des fonctions de classe  $C^\infty$  définies sur  $\Omega, \Omega_g, \Omega_d, \Omega_b, \Omega_h$ .

Pour la première ligne de (2.60) on parle d'équation principale. Pour les lignes suivantes, on parle de conditions à la limite.

## 2.4.2 Différences finies en dimension 2

Nous introduisons une grille uniforme définie par ses sommets de coordonnées

$$x_i = ih_x \text{ et } y_j = jh_y \text{ avec } i \in \llbracket 1, I \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1, J \rrbracket. \tag{2.71}$$



Nous notons  $u_{i,j}$  les valeurs d'une fonction  $u \in C^\infty(\Omega)$  au point  $(x_i, y_j)$ . Nous appelons différences finies à  $p$  points les combinaisons linéaires de  $p$   $u_{i,j}$ . Ces différences finies ont pour vocation d'approcher les dérivées partielles de  $u$  au point  $(x_i, y_j)$ .

### Approximation des dérivées premières

Pour approcher la dérivée partielle suivant  $x$  (resp.  $y$ ), il suffit de fixer  $y$  (resp.  $x$ ) et d'utiliser les différences finies 1D. On a donc

- Différences finies **décentrées à droite et en haut** à 2 points d'ordre 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

- Différences finies **décentrées à gauche et en bas** à 2 points d'ordre 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

- Différences finies **centrées** à 2 points d'ordre 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

## Approximation des dérivées secondes

Les dérivées partielles  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  s'obtiennent aisément à partir de la différence finie à 3 points en dimension 1.

Différences finies **centrées à 3 points** d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}, \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}, \quad (2.76)$$

L'approximation de la dérivée seconde croisée s'obtient en emboîtant des différences finies centrées

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{\partial_x u(x_i, y_{j+1})}{2h_y} - \frac{\partial_x u(x_i, y_{j-1})}{2h_y}, \\ &\simeq \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1})}{4h_x h_y} - \frac{u(x_{i+1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_{j-1})}{4h_x h_y}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

On aboutit à la différence finie **centrée à 4 points** d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_x h_y}. \quad (2.78)$$

Les  $u_{i,j}$  sont au nombre de  $N = IJ$ . Nous allons écrire donc  $N$  équations linéaires les reliant afin de les déterminer.

### 2.4.3 Approximation de l'équation principale

Nous approchons l'équation principale en chaque point intérieur  $i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 2, J-1 \rrbracket$

$$-\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \alpha_{k,l} \partial_k \partial_l u(x_{i,j}) + \sum_{k=1}^2 \beta_k \partial_k u(x_{i,j}) + \gamma u(x_{i,j}) = f(x_{i,j}) \quad (2.79)$$

par des différences finies centrées (afin d'obtenir un schéma d'ordre 2)

$$\begin{aligned} &-\alpha_{1,1} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} - \alpha_{2,2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \\ &- 2\alpha_{1,2} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} \\ &+ \beta_1 \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + \beta_2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} + \gamma u_{i,j} = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

type de frontière	approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}$	approximation de $\frac{\partial u}{\partial y}$
coin haut gauche	$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y}$
coin haut droit	$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y}$
coin bas gauche	$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}$
coin bas droit	$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}$
bord gauche	$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y}$
bord droit	$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}$	$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y}$
bord bas	$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}$	$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}$
bord haut	$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}$	$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y}$

TABLE 2.1 – Approximation des dérivées premières au coin

## 2.4.4 Approximation des conditions aux limites

Les points du bord sont soit des coins soit des points intérieurs à  $\Gamma_g$ ,  $\Gamma_d$ ,  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_h$ . Pour approcher les dérivées partielles apparaissant dans les conditions à la limite on utilise dès que possible une différence finie centrée. Si ce n'est pas possible, on utilise une différence finie décentrée à droite ou à gauche, voir table 2.1.

Les quatre coins appartiennent à deux bords (le coin bas droit appartient à la fois à  $\Gamma_b$  et  $\Gamma_d$ ) il faut donc sélectionner quelle condition à la limite discrétiser. On peut appliquer les règles de la table 2.2 (en respectant les signes apparaissant dans les définition de  $L_g$ ,  $L_d$ ,  $L_b$ ,  $L_d$ ).

## 2.4.5 Formulation vectorielle

L'algèbre sur les matrices n'étant pas pratique d'utilisation nous allons faire correspondre à chaque tableau de valeurs  $u_{i,j}$  le vecteur  $(U_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  défini par

$$U_n = u_{i,j} \quad (2.81)$$

avec  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  relié de manière bijective au couple  $(i, j) \in \llbracket 1, I \rrbracket \times \llbracket 1, J \rrbracket$  par

$$n = i + (j - 1)I. \quad (2.82)$$

Cond. bord 1 $P_1u(x) = f_1(x)$	Cond. bord 2 $P_2u(x) = f_2(x)$	Equation à discrétiser
Dirichlet	Dirichlet	$P_1u(x) = f_1(x)$
Dirichlet	Neumann	$P_1u(x) = f_1(x)$
Dirichlet	Fourier	$P_1u(x) = f_1(x)$
Neumann	Neumann	$\frac{P_1u(x) + P_2u(x)}{2} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$
Neumann	Fourier	$\frac{P_1u(x) + P_2u(x)}{2} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$
Fourier	Fourier	$\frac{P_1u(x) + P_2u(x)}{2} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$

TABLE 2.2 – Equation à discrétiser au coin

On a alors le tableau de correspondance

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{i-1,j-1} = U_{n-I-1}, & \text{si } i > 1 \text{ et } j > 2, \\ u_{i,j-1} = U_{n-I}, & \text{si } i > 1 \text{ et } j > 2, \\ u_{i+1,j-1} = U_{n-I+1}, & \text{si } i > 1 \text{ et } j > 2, \\ u_{i-1,j} = U_{n-1}, & \text{si } j > 1, \\ u_{i,j} = U_n, & \\ u_{i+1,j} = U_{n+1}, & \text{si } j < J, \\ u_{i-1,j+1} = U_{n+I-1}, & \text{si } i > 1 \text{ et } j < J, \\ u_{i,j+1} = U_{n+I}, & \text{si } j < J, \\ u_{i+1,j+1} = U_{n+I+1}, & \text{si } i < I \text{ et } j < J. \end{array} \right. \quad (2.83)$$

On écrit alors l'ensemble des équations discrétisées sous la forme

$$AU = F \quad (2.84)$$

avec  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $U = (U_n)_{1 \leq n \leq N}$  et  $F \in \mathbb{R}^N$ . Bien entendu on peut utiliser des formulations **éliminées** ou **non éliminées**.



## 2.4.6 Un exemple de problème à discrétiser, formulation non éliminée

Nous cherchons à approcher la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} x \in [0, 1], & y \in [0, 1], \\ -\Delta u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + u(x, y) = x, & \text{(équation principale)} \\ u(0, y) = 0, & \text{(bord gauche)} \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + u(x, 0) = 0, & \text{(bord bas)} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0, & \text{(bord droit)} \\ u(x, 1) = x. & \text{(bord haut)} \end{array} \right. \quad (2.85)$$

**Discrétisation de l'équation principale.** Nous considérons les  $(i, j)$  qui vérifient  $1 < i < I$  et  $1 < j < J$ . La discrétisation du laplacien  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  est basée sur celle des deux dérivées secondes

$$-\Delta u(x_i, y_j) = -\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}. \quad (2.86)$$

On aboutit au schéma à **5 points**

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2}u_{i,j-1} + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right)u_{i-1,j} + \left(\frac{4}{h^2} + 1\right)u_{i,j} \\ + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right)u_{i+1,j} - \frac{1}{h^2}u_{i,j+1} = x_i. \end{aligned} \quad (2.87)$$

On peut maintenant passer à la formulation vectorielle en faisant correspondre l'indice  $n$  au couple  $(i, j)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2}U_{n-I} + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right)U_{n-1} + \left(\frac{4}{h^2} + 1\right)U_n \\ + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right)U_{n+1} - \frac{1}{h^2}U_{n+I} = x_i. \end{aligned} \quad (2.88)$$

**Discrétisation du bord gauche** Nous nous plaçons en  $i = 1$  et  $1 < j < J$  et nous devons discrétiser la condition  $u(0, y) = 0$ .

$$u_{i,j} = 0. \quad (2.89)$$

Avec l'indice  $n$  cela devient

$$U_n = 0 \quad (2.90)$$

**Discrétisation du bord bas.** Le bord bas correspond à  $1 < i < I$  et  $j = 1$ . Nous discrétisons la condition à la limite  $-\partial_y u(x, 0) + u(x, 0) = 0$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} + u_{i,j} = 0. \quad (2.91)$$

C'est à dire

$$-\frac{1}{h}U_{n+I} + \left(\frac{1}{h} + 1\right)U_n = 0 \quad (2.92)$$

**Discretisation du bord droit** Le bord droit correspond à  $i = I$  et  $1 < j < J$ . Il nous faut discrétiser la condition  $\partial_x u(1, y) = 0$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} = 0. \quad (2.93)$$

Grâce à l'indice  $n$  cela devient

$$\frac{U_n - U_{n-1}}{h} = 0. \quad (2.94)$$

**Discretisation du bord haut.** On est ici en  $1 < i < I$  et  $j = J$ . On discrétise la condition  $u(x, 1) = x$

$$u_{i,j} = x_i. \quad (2.95)$$

A l'aide de l'indice  $n$  cela devient

$$U_n = x_i \quad (2.96)$$

**Discretisation du coin bas gauche.** On est ici en  $i = 1$  et  $j = 1$ . Au coin bas gauche, les conditions aux limites des bords gauche et droit coexistent. En respectant les règles de a table 2.2 on doit discrétiser la condition  $u(0, 0) = 0$

$$u_{i,j} = 0 \text{ c'est à dire } U_n = 0. \quad (2.97)$$

**Discretisation du coin bas droit.** On est ici en  $i = I$  et  $j = 1$ . On discrétise la moyenne entre les deux conditions à la limite  $\partial_x u(1, 0) - \partial_y u(1, 0) + u(1, 0) = 0$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{2h} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{2h} + \frac{u_{i,j}}{2} = 0 \text{ c'est à dire } -\frac{1}{2h}U_{n-1} + \frac{1}{h}U_n - \frac{1}{2h}U_{n+I} = 0. \quad (2.98)$$

**Discretisation du coin haut droit.** On est ici en  $i = I$  et  $j = J$ . On discrétise la condition de Dirichlet  $u(1, 1) = 1$

$$u_{i,j} = 1 \text{ c'est à dire } U_n = 1. \quad (2.99)$$

**Discretisation du coin haut gauche.** On est ici en  $i = 1$  et  $j = J$ . On discrétise la condition de Dirichlet  $u(0, 0) = 0$

$$u_{i,j} = 0 \text{ c'est à dire } U_n = 0. \quad (2.100)$$

**Construction de la matrice  $A$  et du terme source  $b$ .** Nous notons  $n = n(i, j) = i + (j - 1)I$ . La matrice et le terme source sont définis par  $A_{n,m} = 0$  sauf pour les valeurs suivantes

$$(2.88) \implies \forall (i, j) \in \llbracket 2, I - 1 \rrbracket^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-I} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n,n-1} = -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2} + 1, \\ A_{n,n+1} = -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = x_i. \end{array} \right. \quad (2.101)$$

$$(2.90) \implies i = 1 \text{ et } 1 < j < I \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n} = 1, \\ b_n = 0. \end{array} \right. \quad (2.102)$$

$$(2.92) \implies 1 < i < I \text{ et } j = 1 \quad \begin{cases} A_{n,n} = \frac{1}{h} + 1, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h}, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.103)$$

$$(2.94) \implies i = I \text{ et } 1 < j < I \quad \begin{cases} A_{n,n-1} = -\frac{1}{h}, \\ A_{n,n} = \frac{1}{h}, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.104)$$

$$(2.96) \implies 1 < i < I \text{ et } j = I \quad \begin{cases} A_{n,n} = 1, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.105)$$

$$(2.97) \implies i = 1 \text{ et } j = 1 \quad \begin{cases} A_{n,n} = 1, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.106)$$

$$(2.98) \implies i = I \text{ et } j = 1 \quad \begin{cases} A_{n,n-1} = -\frac{1}{2h}, \\ A_{n,n} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{2h}, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.107)$$

$$(2.99) \implies i = I \text{ et } j = I \quad \begin{cases} A_{n,n} = 1, \\ b_n = 1. \end{cases} \quad (2.108)$$

$$(2.100) \implies i = 1 \text{ et } j = I \quad \begin{cases} A_{n,n} = 1, \\ b_n = 0. \end{cases} \quad (2.109)$$

## 2.4.7 Technique du point virtuel ou fantôme

Elle consiste à ajouter une rangée de points dès que cette rangée permet d'utiliser un différence finie centrée puis d'associer à chaque point une équation à discrétiser. On se référera à la table 2.3. On discrétise d'autre part l'équation principale en tout point intérieur, une condition à la limite pour chaque point extérieur sauf au coin Neumann-Neumann, Neumann-Fourier ou Fourier-Fourier où on effectue le plus souvent la discrétisation suivante.

$$\begin{aligned} \text{(coin bas gauche)} \quad & u_{0,0} + u_{1,1} = u_{1,0} + u_{0,1} \\ \text{(coin bas droit)} \quad & u_{I+1,0} + u_{I,1} = u_{I,0} + u_{I-1,1} \\ \text{(coin haut droit)} \quad & u_{I+1,J} + u_{I,J+1} = u_{I,J} + u_{I+1,J+1} \\ \text{(coin haut gauche)} \quad & u_{0,J} + u_{1,J+1} = u_{1,J} + u_{0,J+1} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Cette n'est nécessaire que dans le cas de la présence d'une dérivée croisée dans l'équation principale.

Au niveau de la formulation vectorielle, on utilise en général une formulation éliminée qui permet de ne pas considérer les points fantômes dans la résolution du système linéaire.

- Bord 2
- Bord 1
- Condition de Dirichlet
- - - - Condition de Neumann ou de Fourier
- Points de grille originaux
- \* Points de grille virtuels
- ou \* Discrétisation de la condition de bord 1
- ou \* Discrétisation de la condition de bord 2
- \* Condition de coin virtuel (2.110)

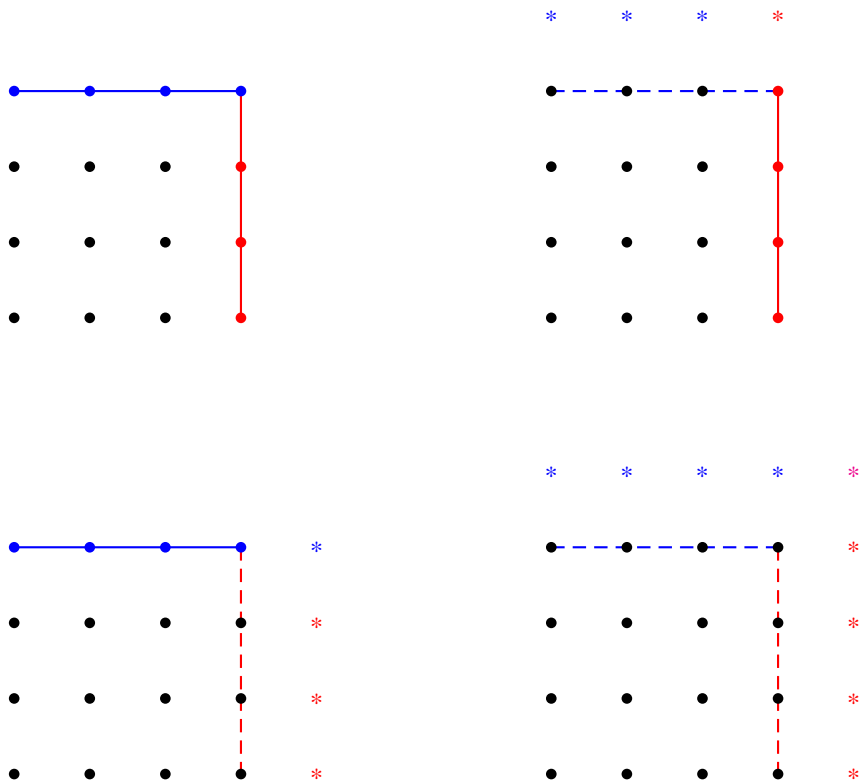


FIGURE 2.3 – Règle d'introduction des points virtuels

## 2.4.8 Un exemple de formulation éliminée avec points virtuels

Nous considérons la solution du système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, 1], \\ -\Delta u(x, y) = 1, & \text{(équation principale)} \\ u(0, y) = 0, & \text{(bord gauche)} \\ u(x, 0) = 0, & \text{(bord bas)} \\ \partial_x u(0, y) = 1, & \text{(bord droit)} \\ \partial_y u(x, 1) + u(x, 1) = 0. & \text{(bord haut)} \end{cases} \quad (2.111)$$

que nous discrétisons sur une grille régulière avec  $h = h_x = h_y$ .

$$x_i = ih \quad i \in \llbracket 0, I \rrbracket \text{ et } y_j = ih \quad j \in \llbracket 0, I \rrbracket \text{ avec } Ih = 1. \quad (2.112)$$

On va utiliser pour discrétiser ce problème une formulation vectorielle éliminée, voir figure 2.4.

**Discrétisation de l'équation principale** On est ici en  $i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$  L'équation principale s'écrit après discrétisation

$$\frac{-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}}{h^2} = 1. \quad (2.113)$$

**Discrétisation de la condition à la limite sur le bord gauche** On se place ici en  $i = 1$  et  $j \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$ . On discrétise les équations  $-\Delta u(h, y) = 1$  et  $u(0, y) = 0$ .

$$u_{0,j} = 0. \quad (2.114)$$

En injectant cette expression dans (2.113)

$$-\frac{1}{h^2}u_{1,j-1} + \frac{4}{h^2}u_{1,j} - \frac{1}{h^2}u_{2,j} - \frac{1}{h^2}u_{1,j+1} = 1. \quad (2.115)$$

**Discrétisation de la condition à la limite sur le bord bas** On se place ici en  $i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$  et  $j = 1$ . On discrétise  $u(x, 0) = 0$  en

$$u_{i,0} = 0. \quad (2.116)$$

Puis en injectant dans (2.113)

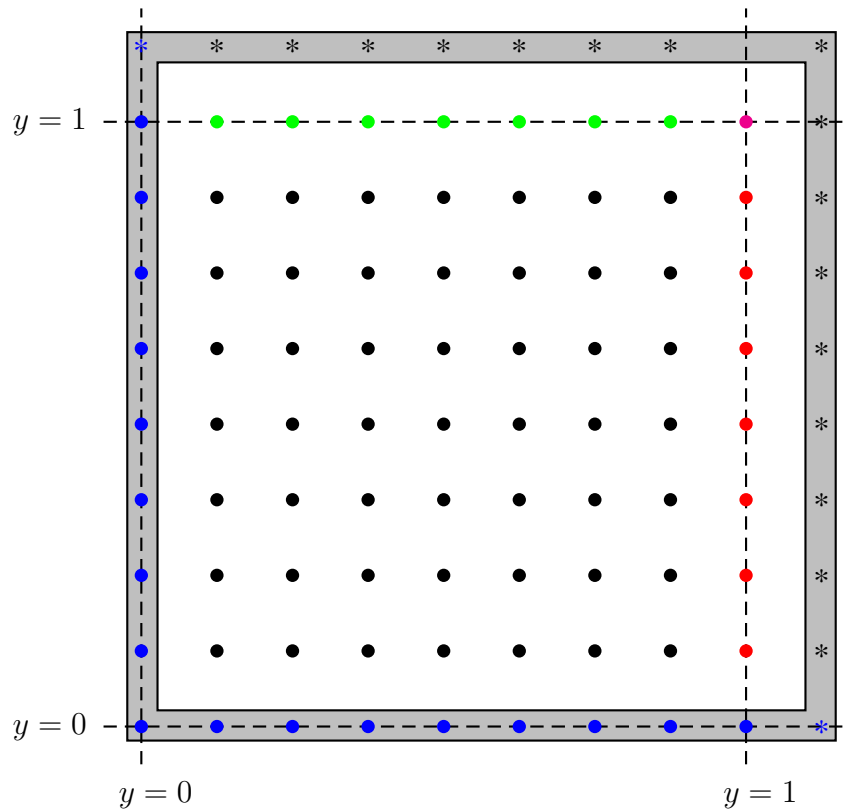
$$-\frac{1}{h^2}u_{i-1,1} + \frac{4}{h^2}u_{i,1} - \frac{1}{h^2}u_{i+1,1} - \frac{1}{h^2}u_{i,2} = 1. \quad (2.117)$$

**Discrétisation de la condition à la limite sur le bord droit** On est ici en  $i = I$  et  $j \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket$ . On discrétise la conditions à la limite  $\partial_x u(1, y) = 1$ .

$$\frac{1}{2h}u_{I+1,j} - \frac{1}{2h}u_{I-1,j} = 1. \quad (2.118)$$

Après élimination de  $u_{I+1,j}$  dans (2.113) on a

$$-\frac{1}{h^2}u_{I,j-1} - \frac{2}{h^2}u_{I-1,j} + \frac{4}{h^2}u_{I,j} - \frac{1}{h^2}u_{I,j+1} = 1 + \frac{2}{h}. \quad (2.119)$$



- \* points virtuels
  - condition de Neumann et de Fourier
  - condition de Fourier
  - condition de Neumann
  - condition de Dirichlet
  - point de grille intrieur
- ▭ variables limins

FIGURE 2.4 – Les points de grille

**Discrétisation de la condition à la limite sur le bord haut** On est ici en  $i \in \llbracket 2, I - 1 \rrbracket$  et  $j = I$ . On discrétise la condition à la limite  $\partial_y u(x, 1) + u(x, 1) = 0$

$$\frac{u_{i,I+1} - u_{i,I-1}}{2h} + u_{i,I} = 0. \quad (2.120)$$

On peut alors éliminer  $u_{i,I+1}$

$$-\frac{2}{h^2}u_{i,I-1} - \frac{1}{h^2}u_{i-1,I} + \left(\frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}\right)u_{i,I} - \frac{1}{h^2}u_{i+1,I} = 1. \quad (2.121)$$

**Discrétisation au coin bas gauche** Au voisinage du point  $i = 1$  et  $j = 1$ , on a les conditions de Dirichlet

$$u_{0,1} = 0 \text{ et } u_{1,0} = 0. \quad (2.122)$$

En injectant dans (2.113), on a

$$\frac{4}{h^2}u_{1,1} - \frac{1}{h^2}u_{2,1} - \frac{1}{h^2}u_{1,2} = 1. \quad (2.123)$$

**Discrétisation au coin bas droit** On se place ici en  $i = I$  et  $j = 1$  où la fonction  $u$  vérifie  $u(1, 0) = 0$  et  $\partial_x u(1, h) = 1$

$$u_{I,0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{I+1,1} - u_{I-1,1}}{2h} = 1. \quad (2.124)$$

En injectant dans (2.113), on a

$$-\frac{2}{h^2}u_{I-1,1} + \frac{4}{h^2}u_{I,1} - \frac{1}{h^2}u_{I,2} = 1 + \frac{2}{h}. \quad (2.125)$$

**Discrétisation au coin haut droit** On est ici en  $i = I$  et  $j = I$ . Nous allons discrétiser les conditions à la limite  $\partial_x u(1, 1) = 1$  et  $\partial_y u(1, 1) + u(1, 1) = 0$

$$\frac{u_{I+1,I} - u_{I-1,I}}{2h} = 1 \text{ et } \frac{u_{I,I+1} - u_{I,I-1}}{2h} + u_{I,I} = 0. \quad (2.126)$$

En injectant dans (2.113), on a

$$-\frac{2}{h^2}u_{I,I-1} - \frac{2}{h^2}u_{I-1,I} + \left(\frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}\right)u_{I,I} = 1 + \frac{2}{h}. \quad (2.127)$$

**Discrétisation au coin haut gauche** On est ici en  $i = 1$  et  $j = I$ . On discrétise les conditions aux limites  $u(0, 1)$  et  $\partial_y u(h, 1) + u(h, 1) = 0$ .

$$u_{0,I} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{1,I+1} - u_{1,I-1}}{2h} + u_{1,I} = 0. \quad (2.128)$$

On élimine alors  $u_{0,I}$  et  $u_{1,I+1}$  de (2.113)

$$-\frac{2}{h^2}u_{I,I-1} + \left(\frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}\right)u_{I,I} - \frac{1}{h^2}u_{I+1,I} = 1 + \frac{2}{h}. \quad (2.129)$$

**Construction de la matrice  $A$  et du terme source  $b$ .** On pose  $n = i + (j - 1)I$  et

$$u_{i,j} = U_n. \quad (2.130)$$

Nous mettons le système d'équations (2.113,2.115,2.117,2.119,2.121,2.123,2.125,2.127,2.129) sous la forme

$$AU = b \text{ avec } A \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad U = (U_n)_{n \in [1, N]}, \quad b \in \mathbb{R}^N \quad (2.131)$$

Remarquons qu'aucun  $n$  ne correspond aux rangées  $i = 0$  et  $j = 0$ .

$$(2.113) \implies i \in [2, I-1] \text{ et } j \in [2, I-1] \left\{ \begin{array}{l} A_{n, n-I} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n, n-1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n, n} = \frac{4}{h^2}, \\ A_{n, n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n, n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.132)$$

$$(2.115) \implies i = 1 \text{ et } j \in [2, I-1] \left\{ \begin{array}{l} A_{n, n-I} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n, n} = \frac{4}{h^2}, \\ A_{n, n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n, n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.133)$$

$$(2.117) \implies i \in [2, I-1] \text{ et } j = 1 \left\{ \begin{array}{l} A_{n, n-1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n, n} = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}, \\ A_{n, n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n, n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.134)$$

$$(2.119) \implies i = I \text{ et } j \in [2, I-1] \left\{ \begin{array}{l} A_{n, n-I} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n, n-1} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n, n} = \frac{4}{h^2}, \\ A_{n, n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1 + \frac{2}{h}. \end{array} \right. \quad (2.135)$$

$$(2.121) \implies i \in [2, I-1] \text{ et } j = I \left\{ \begin{array}{l} A_{n, n-I} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n, n-1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n, n} = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}, \\ A_{n, n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.136)$$

$$(2.123) \implies i = 1 \text{ et } j = 1 \left\{ \begin{array}{l} A_{n, n} = \frac{4}{h^2}, \\ A_{n, n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ A_{n, n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.137)$$



$$(2.125) \implies i = I \text{ et } j = 1 \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-1} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2}, \\ A_{n,n+I} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1 + \frac{2}{h}. \end{array} \right. \quad (2.138)$$

$$(2.127) \implies i = I \text{ et } j = I \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-I} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n,n-1} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}, \\ b_n = 1 + \frac{2}{h}. \end{array} \right. \quad (2.139)$$

$$(2.129) \implies i = 1 \text{ et } j = I \left\{ \begin{array}{l} A_{n,n-I} = -\frac{2}{h^2}, \\ A_{n,n} = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}, \\ A_{n,n+1} = -\frac{1}{h^2}, \\ b_n = 1. \end{array} \right. \quad (2.140)$$

## 2.5 Exercices du chapitre 2

**Exercice 2.1 (Différence finie d'ordre 2)** Soit  $u \in C^3(\mathbb{R})$ . Déterminer les réels  $a, b, c$  pour que la différence finie

$$\frac{a u_n + b u_{n+1} + c u_{n+2}}{h}$$

soit une approximation d'ordre au moins 2 de  $u'(x_n)$ .

**Exercice 2.2 (Différence finie d'ordre 4)** Soit  $u \in C^6(\mathbb{R})$ . Déterminer les réels  $a, b, c, d, e$  pour que la différence finie

$$\frac{a u_{n-2} + b u_{n-1} + c u_n + d u_{n+1} + e u_{n+2}}{h^2}$$

soit une approximation d'ordre au moins 4 de  $u''(x_n)$ .

**Exercice 2.3 (Différence finie d'ordre  $p$ )** Soit  $u \in C^{p+1}(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_p$  tel que la différence finie

$$\frac{a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_p u_{n+p}}{h}$$

soit une approximation d'ordre au moins  $p$  de  $u'(x_n)$ .

**Exercice 2.4 (Translations à droite et différence finie)** Soit  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ . On note  $U = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . On note  $\tau_p$  l'application

$$U = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto \tau_p U = (u_{n+p})_{n \in \mathbb{Z}} \quad (2.141)$$

On définit les opérateurs  $D_p, p \in \mathbb{N}$  par récurrence :

$$D_0 = I \text{ et } D_{p+1} U = \frac{\tau_1 - \tau_{-1}}{2h} D_p U \quad (2.142)$$

1. Montrer l'identité suivante

$$D_p = \left(\frac{1}{2h}\right)^p \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k \tau_{p-2k}$$

2. Montrer que  $(D_p U)_n$  est une approximation d'ordre au moins 2 de  $u^{(p)}(x_n)$ .

**Exercice 2.5 (Equation de Poisson)** On considère un problème de Poisson avec conditions de Dirichlet non-homogènes :

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{pour } x \in ]0, 1[, \quad u(0) = a \quad \text{et} \quad u(1) = b.$$

1. Proposer un schéma aux différences finies d'ordre 2 pour approcher la solution de cette équation.
2. Comment se traduisent les conditions aux limites non-homogènes ?

**Exercice 2.6 (Discrétisation d'un problème de Laplace)** On considère le problème suivant

$$-u''(x) = \cos(x) \quad \text{pour } x \in ]0, \pi[, \quad u(0) = 2 \quad \text{et} \quad u'(\pi) + u(\pi) = 3.$$

1. Montrer que ce problème est bien posé. Déterminer la solution exacte de ce problème.
2. Proposer une discrétisation de ce problème par différence finies sans et avec points fantômes. On donnera les formulations éliminées correspondantes.
3. Implémenter la discrétisation éliminée avec point fantôme sous Matlab.

**Exercice 2.7 (Valeurs propres et discrétisation)** On s'intéresse aux valeurs propres d'une matrice tridiagonale  $A$  de taille  $(N-1) \times (N-1)$  dont le coefficient générique  $(a_{i,j})$  est défini par :

$$a_{i,i} = 2/h^2, \quad a_{i,j} = -1/h^2 \text{ si } |i-j| = 1, \quad a_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

1. On veut étudier les éléments propres de la matrice  $A$ . Démontrer que  $A$  est diagonalisable.
2. On considère une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  et un vecteur propre associé  $x = (x_1, \dots, x_{N-1})$ .
  - (a) En posant  $x_0 = 0$  et  $x_N = 0$ , montrer que les  $x_i$  sont les premiers termes d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
  - (b) Déterminer l'équation caractéristique associée à cette suite. Calculer son discriminant  $\Delta$  en fonction de  $\lambda$ .
  - (c) En déduire de la condition  $x_N = 0$  que  $\Delta \neq 0$ .
3. Montrer alors que les valeurs propres de  $A$  sont les  $\frac{1}{h^2} (2 - 2 \cos(\frac{k\pi}{N}))$  pour  $k = 1, \dots, N-1$  et calculer les vecteurs propres associés.
4. En déduire en particulier que la matrice symétrique  $A$  est définie positive.

5. Calculer le  $n^{\text{ème}}$  plus petit réel  $\lambda_n$  associé à l'équation différentielle ordinaire

$$u'' + \lambda_n u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0. \quad (2.143)$$

Calculer  $\lambda_n^h$  la  $n^{\text{ème}}$  valeur propre de

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)} \quad (2.144)$$

avec  $Nh = L$ . Montrer que  $\lambda_n^h \rightarrow \lambda_n$  quand  $h \rightarrow 0$ .

**Exercice 2.8 (Un problème de Neumann)** On considère le problème suivant :

$$-u''(x) = f(x), \quad \text{pour } x \in ]0, 1[, \quad u'(0) = 0 \quad \text{et} \quad u'(1) = 0.$$

1. Montrer qu'une condition nécessaire pour que le problème admette une solution est

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

On suppose que cette condition est vérifiée dans la suite de l'exercice.

2. Montrer que la solution du problème est déterminée à une constante près.
3. Proposer un schéma aux différences finies d'ordre 2. Expliquer comment se traduisent les conditions aux limites.
4. Ecrire le problème discrétisé sous forme matricielle  $AU = F$ , où  $A$  est une matrice symétrique de taille  $N + 2$ .
5. a- Vérifier que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

b- En considérant le sous-bloc  $A_{i,j=2,\dots,N+2}$  montrer que la matrice  $A$  est de rang supérieur ou égal à  $N + 1$ .

c- En déduire la dimension du noyau de l'application linéaire  $f_A$  de matrice  $A$ .

d- Montrer que  $\text{Im}(f_A) = (\text{Ker}(f_A))^\perp$ .

6. Déduire de la question précédente une condition que devra vérifier le second membre  $F$  afin que le système linéaire admette au moins une solution.
7. Proposer un vecteur  $\tilde{F}$  ayant cette propriété et qui constitue une approximation de  $F$ .

**Exercice 2.9 (Un problème de Sturm-Liouville)** On considère l'équation différentielle suivante :

$$(P) \quad \begin{cases} -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$$

où  $p, q$  et  $f$  sont trois fonctions données dans  $C^4([0, 1])$  et  $\alpha, \beta$  sont deux réels donnés. On supposera également qu'il existe trois constantes positives  $\bar{p}, \underline{q}, \bar{q}$  telles que,

$$\forall x \in [0, 1] \quad |p(x)| \leq \bar{p}, \quad 0 < \underline{q} \leq q(x) \leq \bar{q}.$$

On admettra que le problème (P) admet une unique solution  $u \in C^6([0, 1])$ . Le but de cet exercice est de construire un schéma d'approximation du problème (P) et d'établir une estimation d'erreur.

On subdivise l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n + 1$  sous-intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  avec  $x_i = ih$  pour  $i = 0, \dots, n + 1$  où  $h = 1/(n + 1)$  et on notera  $u_i$  l'approximation de la solution en  $x = x_i$ . On notera également  $p_i = p(x_i), q_i = f(x_i)$  et  $f_i = f(x_i)$ , pour  $i = 0, \dots, n + 1$

1. Montrer que la solution du problème (P) vérifie pour tout  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} & \frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}))}{h^2} + p_i \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} + q_i u(x_i) = f_i \\ & + \frac{h^2}{12} [2p_i u^{(3)}(\eta_i) - u^{(4)}(\xi_i)], \end{aligned}$$

où  $\eta_i, \xi_i \in ]x_{i-1}, x_{i+1}[$ .

2. En déduire le schéma d'approximation suivant du problème (P) :

$$(P_h) \quad \begin{cases} \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i = f_i, & i = 1, \dots, n \\ u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \beta \end{cases}$$

3. Montrer que le schéma  $(P_h)$  peut s'écrire sous forme matricielle

$$(S) \quad Au = b$$

où on a noté  $u = (u_1, \dots, u_n)^T$  et tel que la matrice  $A$  soit à diagonale strictement positive. On explicitera la matrice  $A$  et le vecteur  $b$ .

4. On suppose dans cette question que

$$h < 2/L, \tag{2.145}$$

où  $L = \sup_{x \in [0, 1]} |p(x)|$ .

(a) Montrer que la matrice  $A$  du système (S) est à diagonale strictement dominante (i.e.  $\forall i = 1, \dots, n, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ).

(b) En déduire que le système (S) admet une unique solution.

5. On suppose encore que le pas d'approximation  $h$  vérifie l'hypothèse précédente (2.145).

(a) Montrer que la solution du problème (P) vérifie

$$(2 + h^2 q_i) u(x_i) - \left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) u(x_{i+1}) - \left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) u(x_{i-1}) = h^2 f_i$$

$$+ p_i \frac{h^4}{6} u^{(3)}(x_i) - \frac{h^4}{12} u^{(4)}(x_i) + O(h^6)$$

pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

(b) En déduire que l'erreur notée  $e_i = u(x_i) - u_i$  vérifie

$$(2 + h^2 q_i) e_i = \left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) e_{i+1} + \left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) e_{i-1}$$

$$+ \left[ \frac{p_i}{6} u^{(3)}(x_i) - \frac{1}{12} u^{(4)}(x_i) \right] h^4 + O(h^6)$$

pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

(c) On pose  $e = \max_{i=0, \dots, n+1} |e_i|$ . Démontrer l'estimation d'erreur suivante

$$e \leq \left[ \frac{2LK_1 + K_2}{12q} \right] h^2 + O(h^4)$$

où  $K_1 = \sup_{x \in [0,1]} |u^{(3)}(x)|$  et  $K_2 = \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|$ .

**Exercice 2.10 (Discrétisation éliminée)** Proposer une formulation discrétisée avec élimination et points fantômes du problème suivant

$$\begin{cases} u \in C^\infty([0, L]), \\ -u''(x) + xu(x) = x \quad \text{pour } x \in ]0, L[, \\ u'(0) + u(0) = 1, \\ u'(L) = 4. \end{cases} \quad (2.146)$$

**Exercice 2.11 (Discrétisation en dimension 2 et 3)** On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \\ -\Delta u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{dans } \Omega, \\ u(x, y) = x \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.147)$$

1. Proposer une discrétisation du problème (2.147) lorsque  $\Omega = [0, 1]^2$ .

2. Même question pour  $\Omega = [0, 1]^3$ .

# Chapitre 3

## Discrétisation des problèmes aux limites d'évolution

### 3.1 Discrétisation de l'équation de réaction-advection-diffusion en dimension un d'espace

Nous considérons un problème posé sur le domaine

$$\{(x, t) \in [0, L] : x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0\}. \quad (3.1)$$

qui s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - Pu(x, t) = f(x, t) & \text{pour } x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0 \\ L_G u = \alpha, \quad L_D u = \beta, \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pour } x \in [0, L]. \end{cases} \quad (3.2)$$

avec  $P$ ,  $L_G$  et  $L_D$  des opérateurs différentiels

$$\left\{ \begin{array}{ll} Pu(x) = a(x)\partial_x^2 u(x) + b(x)\partial_x u(x) + c(x)u(x), & \\ L_G u = u(0, t), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t) + \gamma u(0, t), & \text{(condition de Fourier)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t) + \gamma u(0, t) + \gamma' \partial_t u(0, t), & \\ L_D u = u(L, t), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t) + \delta u(L, t), & \text{(condition de Fourier)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t) + \delta u(L, t) + \delta' \partial_t u(L, t). & \end{array} \right. \quad (3.3)$$

On parle d'équation principale pour la première ligne de (3.2), de conditions aux limites pour la deuxième ligne et de condition initiales pour la dernière ligne.

D'autre part, on parle de

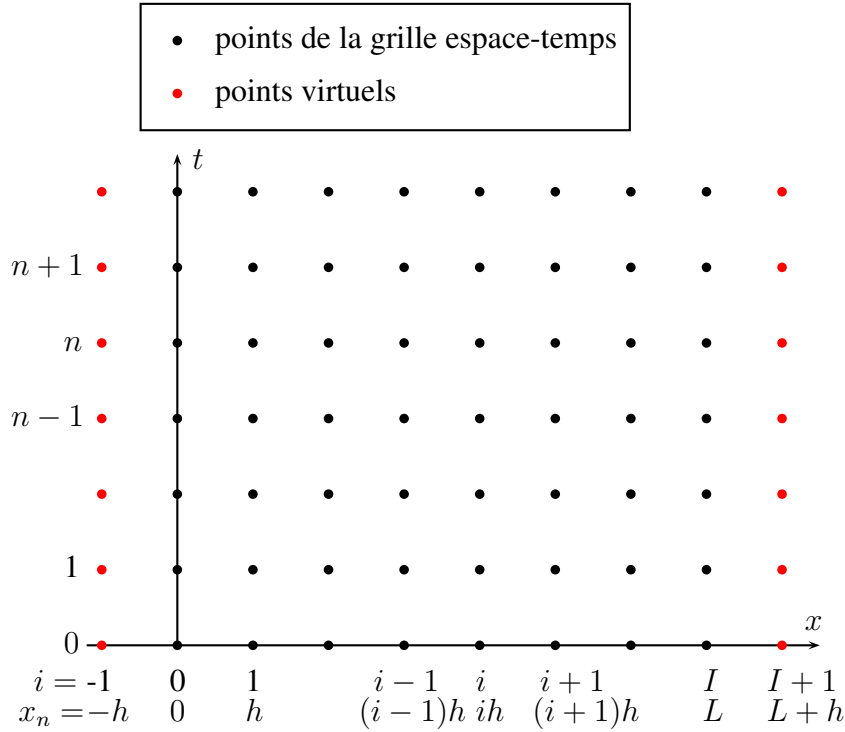


FIGURE 3.1 – grille espace-temps

- terme de diffusion pour  $a(x)\partial_x^2 u(x, t)$
- terme d’advection pour  $b(x)\partial_x u(x, t)$
- terme de réaction pour  $c(x)u(x, t)$

Dans la suite, en chacun des points de la grille espace-temps

$$x_i = ih \text{ et } t_n = n\delta t \text{ avec } i \in \llbracket 0, I \rrbracket \text{ et } n \geq 0 \text{ avec } Ih = L, \quad (3.4)$$

nous allons définir une approximation numérique de la solution  $u$

$$u_i^n \simeq u(x_i, t_n) \quad \text{pour } i \in \llbracket 0, I \rrbracket \text{ et } n \geq 0. \quad (3.5)$$

Les conditions aux limites contenant le terme  $\partial_x u(x, t)$  seront souvent prises en compte en introduisant les points virtuels  $u_{-1}^n$  et  $u_{I+1}^n$ , voir figure 3.1

### 3.1.1 Semi-discrétisation en espace

Nous discrétisons nos fonction dans la variable d’espace tout en conservant le caractère continu du temps. Nous introduisons les fonctions  $u_i(t)$  qui approchent  $u(x_i, t)$ .

$$u_i(t) \simeq u(x_i, t) \quad \text{pour tout } i \quad (3.6)$$

Les  $u_i(t)$  ne seront jamais calculés en pratique mais sont des intermédiaires pour dériver les schémas numériques

Nous allons pour définir les  $u_i(t)$  remplacer les dérivées partielles en espace par des différences finies qu’on choisira le plus souvent centrées. Rappelons que les différences finies centrées

sont données par

$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x_i, t) \simeq \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2}, \\ \partial_x u(x_i, t) \simeq \frac{u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t)}{2h}. \end{cases} \quad (3.7)$$

**Exemple 1.** On va illustrer la semi-discrétisation en espace sur le problème

$$\begin{cases} x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0, \\ \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 1, \\ u(0, t) = 0 \text{ et } \partial_x u(L, t) + u(L, t) = 0. \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Semi-discrétisation en espace. On introduit une grille  $x_i = ih$  avec  $i \in \llbracket 0, I + 1 \rrbracket$  et  $Ih = L$  avec un point fantôme à droite afin d'approcher de manière précise  $\partial_x u(L, t)$ . On commence par approcher l'équation

$$\partial_t u(x_i, t) - \partial_x^2 u(x_i, t) = 1 \quad \forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket \quad \forall t \geq 0 \quad (3.9)$$

On obtient le schéma

$$\partial_t u_i(t) - \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2} = 1 \quad \forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket \quad \forall t \geq 0. \quad (3.10)$$

Pour la condition à la limite à gauche on a

$$u_0(t) = 0. \quad (3.11)$$

Pour la condition à la limite à droite on a

$$\frac{u_{I+1}(t) - u_{I-1}(t)}{2h} + u_I(t) = 0. \quad (3.12)$$

**Exemple 2.** On va illustrer la semi-discrétisation en espace sur le problème

$$\begin{cases} u : [0, \pi] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) + \partial_x u(x, t) = t, \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0 \\ \partial_t u(0, t) + u(0, t) = 0, \\ \partial_x u(\pi, t) = 1, \\ u(x, 0) = \sin(x), \quad \forall x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (3.13)$$

On introduit une grille  $x_i = ih$  avec  $i \in \llbracket 0, I + 1 \rrbracket$  et  $Ih = L$  avec un point fantôme à droite afin d'approcher de manière précise  $\partial_x u(\pi, t)$ . On obtient le schéma

$$\begin{cases} u'_0(t) + u_0(t) = 0, \\ u'_i(t) + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right)u_{i-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_i(t) + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right)u_{i+1}(t) = t, \\ -\frac{1}{2h}u_{I-1}(t) + \frac{1}{2h}u_{I+1}(t) = 1. \end{cases} \quad (3.14)$$



### 3.1.2 Formulation éliminée

L'idée ici est de transformer le système d'équations afin de faire apparaître un problème aux données initiales en éliminant toutes les variables associées à aucune dérivée en temps. On aboutit alors à un système d'EDO couplées pouvant se mettre sous la forme d'une EDO vectorielle avec  $U(t) = (u_i(t))_i$

$$\begin{cases} U'(t) + AU(t) = F(t), & \forall t \geq 0, \\ U_i(0) = u^0(x_i). \end{cases} \quad (3.15)$$

Reprenons les deux exemples précédents.

**Exemple 1.** Nous éliminons maintenant  $u_0(t) = 0$  et  $u_{I+1}(t) = u_{I-1}(t) - 2hu_I(t)$ . On peut alors réécrire (3.10) sous la forme d'un système d'EDO

$$\begin{cases} u_1'(t) + \frac{2}{h^2}u_1(t) - \frac{1}{h^2}u_2(t) = 1, \\ u_i'(t) - \frac{1}{h^2}u_{i-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_i(t) - \frac{1}{h^2}u_{i+1}(t) = 1 \quad \forall i \in \llbracket 2, I-1 \rrbracket, \\ u_I'(t) - \frac{2}{h^2}u_{I-1}(t) + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right)u_I(t) = 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

En notant  $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_I(t))^T$  on a

$$U'(t) + AU(t) = F(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (3.17)$$

avec  $F(t) = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^I$  et

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{2}{h} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I} \quad (3.18)$$

**Exemple 2.** Nous éliminons maintenant  $u_{I+1}(t) = u_{I-1}(t) + 2h$ . On obtient avec  $i \in \llbracket 1, I-1 \rrbracket$

$$\begin{cases} u_0'(t) + u_0(t) = 0, \\ u_i'(t) + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right)u_{i-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_i(t) + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right)u_{i+1}(t) = t, \\ u_I'(t) - \frac{2}{h^2}u_{I-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_I(t) = t + \frac{1}{2h} - 1, \end{cases} \quad (3.19)$$

En notant  $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_I(t))$  on a

$$U'(t) + AU(t) = F(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (3.20)$$

avec  $F(t) = (0, t, t, \dots, t, t + \frac{1}{2h} - 1)^T \in \mathbb{R}^{I+1}$  et  $A \in \mathbb{R}^{(I+1) \times (I+1)}$  donnés par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

### 3.1.3 Discrétisation en temps

Afin d'aboutir au schéma utilisé en pratique, on discrétise l'EDO (3.15) à l'aide d'un schéma numérique. Pour les schémas présentés au chapitre 1, ceci s'écrit avec  $F^n = F(t^n)$ .

– Euler explicite.

$$U^{n+1} = U^n - \delta t A U^n + \delta t F^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.22)$$

– Euler implicite.

$$(I + \delta t A) U^{n+1} = U^n + \delta t F^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.23)$$

– Trapèzes implicites. On parle aussi de schéma de Cranck-Nicholson

$$\left(I + \frac{\delta t A}{2}\right) U^{n+1} = \left(I - \frac{\delta t A}{2}\right) U^n + \delta t \frac{F^{n+1} + F^n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.24)$$

## 3.2 Discrétisation de l'équation des ondes

L'équation des ondes scalaires s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \text{ de classe } C^2 \text{ tel que} \\ \partial_t^2 u(x, t) - c^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0, \\ L_g u = \alpha \text{ et } L_d u = \beta, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = v^0(x), \quad \forall x \in [0, L]. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

avec  $L_G$  et  $L_D$  les opérateurs différentiels qui sont donnés au choix par

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_G u = u(0, t), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t) + \gamma u(0, t), & \text{(condition de Fourier)} \\ \text{ou } \partial_x u(0, t) + \gamma u(0, t) + \gamma' \partial_t u(0, t), & \\ L_D u = u(L, t), & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t), & \text{(condition de Neumann)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t) + \delta u(L, t), & \text{(condition de Fourier)} \\ \text{ou } \partial_x u(L, t) + \delta u(L, t) + \delta' \partial_t u(L, t). & \end{array} \right. \quad (3.26)$$

### 3.2.1 Semi-discrétisation en espace

Comme pour les équations de diffusion, la semi-discrétisation en espace consiste à approcher  $u(x_i, t)$  par  $u_i(t)$

$$u_i(t) \simeq u(x_i, t). \quad (3.27)$$

Nous approchons alors les dérivées en espace par des différences finies. Passons maintenant à un exemple.

**Exemple.** Nous souhaitons approcher la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \text{ de classe } C^2 \text{ tel que} \\ \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t), \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0, \\ \partial_x u(0, t) = 0 \text{ et } u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = v^0(x), \quad \forall x \in [0, L]. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Nous introduisons un point fantôme en  $x = -h$  afin de prendre en compte la dérivée en  $x = 0$ . Nous obtenons le système d'EDO

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{h}u_{-1}(t) + \frac{1}{h}u_1(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \\ u_i''(t) - \frac{1}{h^2}u_{i-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_i(t) - \frac{1}{h^2}u_{i+1}(t) = f(x, t), \quad \forall i \in [0, I-1] \text{ et } t \geq 0, \\ u_I(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \\ u_i(0) = u^0(x_i), \quad u_i'(0) = v^0(x_i), \quad \forall i \in [0, I]. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

### 3.2.2 Formulation éliminée

Nous éliminons les inconnues de l'équation qui ne sont pas associées à des dérivées en temps. Reprenons l'exemple précédent.

$$\begin{cases} u_0''(t) + \frac{2}{h^2}u_0(t) - \frac{2}{h^2}u_1(t) = f(x_0, t), & \forall t \geq 0, \\ u_i''(t) - \frac{1}{h^2}u_{i-1}(t) + \frac{2}{h^2}u_i(t) - \frac{1}{h^2}u_{i+1}(t) = f(x_i, t), & \forall i \in [1, I-1] \text{ et } t \geq 0, \\ u_{I-1}''(t) - \frac{1}{h^2}u_{I-2}(t) + \frac{2}{h^2}u_{I-1}(t) = f(x_{I-1}, t), & \forall t \geq 0, \\ u_i(0) = u^0(x_i), \quad u_i'(0) = v^0(x_i), & \forall i \in [0, I]. \end{cases} \quad (3.30)$$

Nous introduisons le vecteur  $U(t) = (u_1(t), \dots, u_{I-1}(t))$  qui vérifie

$$\begin{cases} U''(t) + AU(t) = F(t), & \forall t \geq 0, \\ U_i(0) = u^0(x_i), \\ U_i'(0) = v^0(x_i). \end{cases} \quad (3.31)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \quad \text{avec } F(t) = \begin{bmatrix} f(x_0, t) \\ f(x_1, t) \\ \vdots \\ f(x_{I-1}, t) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

### 3.2.3 Schéma à un pas

Après discrétisation et élimination l'équation des ondes semi-discrétisée a la forme suivante

$$\begin{cases} U''(t) + AU(t) = F(t) & \forall t \geq 0, \\ U(0) = U^0 \\ U'(0) = V^0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Les schémas à un pas sont basés sur la réduction d'ordre de cette EDO. Avec  $V(t) = U'(t)$  on a

$$U'(t) = V(t) \quad \text{et} \quad V'(t) = F(t) - AU(t) \quad (3.34)$$

avec les conditions initiales

$$U(0) = U^0 \quad \text{et} \quad V(0) = V^0. \quad (3.35)$$

On introduit alors l'inconnue vectorielle  $Y(t) = (U(t), V(t))^T$

$$Y'(t) = BY(t) + G(t) \quad (3.36)$$

avec  $B$  la matrice définie par bloc

$$B = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

### 3.2.4 Schéma à deux pas

Le schéma à deux pas consiste à chercher une relation de récurrence reliant  $U^{n-1}$ ,  $U^n$  et  $U^{n+1}$

$$\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\delta t^2} + AU^n = F^n \quad (3.38)$$

On obtient le schéma explicite dit saute-mouton

$$U^{n+1} = 2U^n - U^{n-1} + \delta t^2 (F^n - AU^n) \quad (3.39)$$

L'initialisation de ce schéma nécessite les valeurs de  $U^0 = U(0)$  et de  $U^1 \simeq U(\delta t)$ . Pour définir  $U^1$ , on utilise le développement limité de  $U$  en  $t = 0$

$$\begin{aligned} U(\delta t) &\simeq U(0) + \delta t U'(0), & (\text{ordre 1}) \\ U(\delta t) &\simeq U(0) + \delta t U'(0) + \frac{(\delta t)^2}{2} U''(0). & (\text{ordre 2}). \end{aligned} \quad (3.40)$$

On obtient les initialisations d'ordre 1 et 2 (rappelons que les valeurs de  $U(0)$  et  $U'(0)$  sont connues)

$$\begin{aligned} U_i^0 &= u^0(x_i) \quad \text{et} \quad U^1 = U^0 + \delta t V^0, & (\text{ordre 1}) \\ U_i^0 &= u^0(x_i) \quad \text{et} \quad U_i^1 = U^0 + \delta t V^0 + \frac{(\delta t)^2}{2} (F^0 - AU^0), & (\text{ordre 2}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

avec  $V^0 = (v^0(x_i))_i$

## 3.3 Analyse de stabilité de Von-Neumann

### 3.3.1 La transformation de Fourier

On note  $L^p(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions mesurables  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx < +\infty \quad (3.42)$$

On note

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.43)$$

La transformation de Fourier est définie sur  $L^1(\mathbb{R})$  par

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx \quad (3.44)$$

La transformation de Fourier peut être prolongée en un opérateur isométrique de  $L^2(\mathbb{R})$

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2. \quad (3.45)$$

On note  $\tau_a$  l'opérateur de shift ou translation

$$(\tau_a f)(x) = f(x + a), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.46)$$

L'opérateur  $\tau_a$  est dans le plan Fourier un opérateur multiplicatif. La transformation de Fourier va donc nous permettre d'analyser finement

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{\tau_a f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) \exp(-ik(x+a)) dx \exp(ika) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ik(x)) dx \exp(ika) \\ &= \exp(ika) \widehat{f}(k), \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned} \right. \quad (3.47)$$

Par densité de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  on a aussi

$$\widehat{\tau_a f}(k) = \exp(ika) \widehat{f}(k). \quad (3.48)$$

### 3.3.2 Principe de l'analyse de Von Neumann

Cette analyse étudie la stabilité d'un schéma numérique. On considère un problème posé sur tout  $\mathbb{R}$ .

On associe au vecteur  $u_i^n$  la fonction  $w^n(x)$  définie par

$$w^n(x) = u_i^n, \quad \text{pour } x \in [x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}[ \quad (3.49)$$

L'étude de Von-Neumann consiste

- dans le cas d'un schéma à un pas à déterminer la relation de récurrence entre  $\widehat{w}^n$  et  $\widehat{w}^{n+1}$

$$\widehat{w}^{n+1} = \rho(k) \widehat{w}^n \quad (3.50)$$

puis de déterminer pour quels  $h$  et  $\delta t$

$$|\rho(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{R}. \quad (3.51)$$

- dans le cas d'un schéma à deux pas à déterminer la relation de récurrence entre  $\widehat{w}^{n-1}$ ,  $\widehat{w}^n$  et  $\widehat{w}^{n+1}$

$$\widehat{w}^{n+1} + a(k) \widehat{w}^n + b(k) \widehat{w}^{n-1} = 0. \quad (3.52)$$

puis de calculer pour quels  $h$  et  $\delta t$

$$|\rho_1(k)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\rho_2(k)| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (3.53)$$

avec  $\rho_1(k)$  et  $\rho_2(k)$  les deux racines de

$$\rho^2 + a(k)\rho + b(k) = 0. \quad (3.54)$$

### 3.3.3 Discrétisation de l'équation de diffusion par le schéma d'Euler explicite

La discrétisation de l'équation de diffusion

$$\partial_t u(x, t) - c \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad (3.55)$$

est basée sur une différence finie centrée en espace et un schéma d'Euler explicite en temps qui prend la forme suivante

$$u_i^{n+1} = u_i^n + c \frac{\delta t}{h^2} \left( u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n \right) \quad (3.56)$$

Ceci s'écrit à l'aide des fonctions  $w^n$  et  $w^{n+1}$  sous la forme

$$w^{n+1} = w^n + c \frac{\delta t}{h^2} \left( \tau_h w^n - 2w^n + \tau_{-h} w^n \right) \quad (3.57)$$

En appliquant la transformation de Fourier on obtient

$$\widehat{w}^{n+1} = \left( 1 + c \frac{\delta t}{h^2} \left( \exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh) \right) \right) \widehat{w}_n \quad (3.58)$$

Nous avons obtenu  $\rho(k)$  qui vaut

$$\begin{cases} \rho(k) = 1 + c \frac{\delta t}{h^2} \left( \exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh) \right) \\ \quad = 1 + c \frac{\delta t}{h^2} \left( 2 \cos(kh) - 2 \right) \\ \quad = 1 - 4 \frac{c \delta t}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \end{cases} \quad (3.59)$$

Comme  $\sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)$  est inférieur à 1 et atteint 1, la condition de stabilité au sens de Von Neumann s'écrit

$$1 - 4 \frac{c \delta t}{h^2} \geq -1, \quad (3.60)$$

c'est à dire

$$\frac{c \delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.61)$$

C'est une condition très contraignante. En effet le pas de temps doit forcément être plus petit que le carré du pas d'espace.

### 3.3.4 Application à l'équation de diffusion discrétisé par le schéma d'Euler implicite

Reprenons la discrétisation de (3.55) par un schéma d'Euler implicite qui s'écrit

$$u_i^{n+1} - c \frac{\delta t}{h^2} \left( u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} \right) = u_i^n. \quad (3.62)$$

Ceci s'écrit à l'aide des fonctions  $w^n$  et  $w^{n+1}$  sous la forme

$$w^{n+1} - c \frac{\delta t}{h^2} \left( \tau_h w^{n+1} - 2w^{n+1} + \tau_{-h} w^{n+1} \right) = w^n \quad (3.63)$$

En appliquant la transformation de Fourier on obtient

$$\left(1 - c \frac{\delta t}{h^2} \left(\exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh)\right)\right) \widehat{w}^{n+1} = \widehat{w}^n \quad (3.64)$$

Nous avons obtenu  $\rho(k)$  qui vaut

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho(k)} = 1 - c \frac{\delta t}{h^2} \left(\exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh)\right) \\ = 1 - c \frac{\delta t}{h^2} (2 \cos(kh) - 2) \\ = 1 + 4 \frac{c \delta t}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \end{cases} \quad (3.65)$$

Comme  $\sin^2(\frac{kh}{2})$  est positif  $\rho(k)$  est inférieur à 1 pour tout  $k$  Le schéma est donc inconditionnellement stable au sens de Von-Neumann.

### 3.3.5 Application à l'équation des ondes (schéma saute-mouton)

On discrétise l'équation des ondes homogènes

$$\partial_t^2 u(x, t) - c^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.66)$$

par des différences finies à 3 points en espace et en temps

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\delta t)^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0 \quad (3.67)$$

Ceci s'écrit à l'aide des fonctions  $w^{n+1}$ ,  $w^n$  et  $w^{n-1}$

$$\frac{w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}}{(\delta t)^2} - c^2 \frac{\tau_h u^n - 2u_i^n + \tau_- h w^n}{h^2} = 0 \quad (3.68)$$

$$\widehat{w}^{n+1} - \left(2 + c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \left(\exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh)\right)\right) \widehat{w}^n + \widehat{w}^{n-1} = 0 \quad (3.69)$$

On a donc la suite de Fibonacci

$$\widehat{w}^{n+1} - \left(2 - 4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\right) \widehat{w}^n + \widehat{w}^{n-1} = 0 \quad (3.70)$$

dont le polynôme caractéristique est donné par

$$\rho^2 - \left(2 - 4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\right) \rho + 1 = 0 \quad (3.71)$$

Sachant que le produit de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  vaut 1. Afin qu'elles soient toutes deux inférieures à 1 en module il faut et suffit que le discriminant de ce polynôme soit négatif

$$\begin{cases} \Delta = \left(2 - 4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\right)^2 - 4 \\ = -4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \left(4 - 4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)\right) \end{cases} \quad (3.72)$$



Le discriminant est donc négatif ssi

$$4c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \leq 4 \quad (3.73)$$

Comme  $\sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)$  est inférieur à 1 et atteint 1, la condition de stabilité au sens de Von Neumann s'écrit donc

$$c^2 \frac{\delta t^2}{h^2} \leq 1 \quad \text{ou encore} \quad c \frac{\delta t}{h} \leq 1. \quad (3.74)$$

Traditionnellement, on parle de condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Cette condition est beaucoup moins contraignante que la condition de stabilité pour le schéma explicite et le problème de diffusion. C'est pourquoi les schémas saute-mouton sera très souvent utilisé en pratique.

### 3.3.6 Application à l'équation des ondes discrétisées par une méthode des trapèzes implicites

On discrétise l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad (3.75)$$

à l'aide d'un schéma à trois pas en espace

$$\partial_t^2 u(i)(t) - \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2} = 0 \quad (3.76)$$

et après réduction d'ordre

$$\begin{cases} \partial_t u_i(t) = v_i(t) \\ \partial_t v_i(t) = \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2} \end{cases} \quad (3.77)$$

d'une méthode des trapèzes implicite en temps

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = \frac{v_i^n + v_i^{n+1}}{2} \\ \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2h^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2h^2} \end{cases} \quad (3.78)$$

On applique alors la transformation de Fourier et on obtient

$$\begin{cases} \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\delta t} = \frac{\hat{v}^n + \hat{v}^{n+1}}{2} \\ \frac{\hat{v}^{n+1} - \hat{v}^n}{\delta t} = \frac{\exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh)}{h^2} \left( \frac{\hat{u}^{n+1} + \hat{u}^n}{2} \right). \end{cases} \quad (3.79)$$

Rappelons que

$$\begin{cases} \exp(ikh) - 2 + \exp(-ikh) = \left( \exp\left(\frac{ikh}{2}\right) - \exp\left(-\frac{ikh}{2}\right) \right)^2 \\ = (2i)^2 \left( \frac{\exp\left(\frac{ikh}{2}\right) - \exp\left(-\frac{ikh}{2}\right)}{2i} \right)^2 \\ = -4 \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \end{cases} \quad (3.80)$$

On a donc les relations

$$\begin{cases} \widehat{u}^{n+1} - \frac{\delta t}{2} \widehat{v}^{n+1} &= \widehat{u}^n + \frac{\delta t}{2} \widehat{v}^n, \\ \frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} \widehat{u}^{n+1} + \widehat{v}^{n+1} &= -\frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} \widehat{u}^n + \widehat{v}^n \end{cases} \quad (3.81)$$

Il suit

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta t}{2} \\ \frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{u}^{n+1} \\ \widehat{v}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\delta t}{2} \\ -\frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{u}^n \\ \widehat{v}^n \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

En inversant la matrice à gauche, on a

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}^{n+1} \\ \widehat{v}^{n+1} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\delta t}{2} \\ -\frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} & 1 \end{bmatrix}^2}{1 + \frac{\delta t^2 \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2}} \begin{bmatrix} \widehat{u}^n \\ \widehat{v}^n \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

L'étude de stabilité de Von-Neumann revient à déterminer les s valeurs propres de la matrice

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\delta t}{2} \\ -\frac{2\delta t \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2} & 1 \end{bmatrix}^2}{1 + \frac{\delta t^2 \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2}} \quad (3.84)$$

sont inférieures à 1. Son polynôme caractéristique est donné par

$$\left( \lambda - \frac{1}{1 + \frac{\delta t^2 \sin^2(\frac{kh}{2})}{h^2}} \right)^2 + 1 \quad (3.85)$$

Ses racines sont des complexes conjugués de module 1. Le schéma est donc inconditionnellement stable.